

2006 年度 修士論文

銀河団における  
運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果  
の研究

上智大学大学院  
理工学研究科 物理学専攻  
博士前期過程 伊藤研究室

B0576012 大畑 洋一

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>序論</b>	<b>3</b>
1.1	宇宙背景放射	3
1.1.1	宇宙背景放射の発見	3
1.1.2	宇宙背景放射の起源	5
1.1.3	宇宙背景放射の特性	6
1.1.4	宇宙背景放射の観測	7
1.2	銀河団	19
1.2.1	銀河団の特性	19
1.2.2	異なる波長で見た銀河団	19
1.2.3	高温の銀河団ガス	19
1.3	スニャエフ・ゼルドビッチ効果	28
1.3.1	スニャエフ・ゼルドビッチ効果の予言	28
1.3.2	スニャエフ・ゼルドビッチ効果の応用	28
1.3.3	スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測	30
<b>第 2 章</b>	<b>熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果</b>	<b>39</b>
2.1	はじめに	39
2.2	非相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	40
2.2.1	カンパニエーツ近似を用いた熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算	40
2.2.2	熱的スニャエフゼルドビッチ効果の特性	44
2.3	相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	46
2.3.1	ボルツマン方程式の展開	46
2.3.2	相対論的補正の重要性	48
2.3.3	展開式の精度	49
2.4	相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の高次展開	63
2.4.1	展開式の精度	63
2.4.2	展開式の各項	79
2.5	多重散乱を考慮した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	83
2.5.1	ボルツマン方程式の展開	83
2.5.2	2 回散乱成分の特性	84
2.5.3	2 回散乱成分の寄与	85
2.5.4	相対論的補正の重要性	86

2.5.5	展開式の精度	86
2.6	熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のまとめ	115
<b>第3章</b>	<b>運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果</b>	<b>117</b>
3.1	はじめに	117
3.2	非相対論的に計算した運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	117
3.2.1	運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算	117
3.2.2	運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の特性	119
3.3	相対論的に計算した運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	121
3.3.1	ボルツマン方程式	121
3.3.2	運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の特性	123
3.3.3	相対論的補正の重要性	124
3.3.4	運動学的スニャエフゼルドビッチ効果の寄与	124
3.3.5	展開式の精度	125
3.3.6	展開式の各項	142
3.4	Shimon と Rephaeli による運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算	146
3.4.1	Shimon と Rephaeli による計算結果との比較及び考察	146
3.4.2	Shimon と Rephaeli による計算と間違い箇所	150
3.5	運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のまとめ	162
<b>第4章</b>	<b>まとめ</b>	<b>163</b>
<b>付録A</b>	<b>熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の詳細な計算</b>	<b>169</b>
A.1	ボルツマン方程式の計算と数値積分について	169
A.2	展開計算	177
A.2.1	化学ポテンシャルを含む項	183
A.2.2	$g(\theta_e)$ の展開計算	184
A.3	(A.57) 式の証明	185
A.4	三角関数の積分と $\Gamma$ 関数の計算	186
A.4.1	(A.24) 式の証明	190
A.5	$Y_5$ $Y_{10}$ までの計算結果	190
<b>付録B</b>	<b>2回散乱を考慮した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の詳細な計算</b>	<b>198</b>
B.1	ボルツマン方程式の計算と数値積分について	198
B.2	展開計算	202
B.3	$Z_0$ $Z_{10}$ までの計算結果	204
<b>付録C</b>	<b>運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の詳細な計算</b>	<b>217</b>
C.1	ボルツマン方程式の計算	217
C.1.1	数値積分	217
C.1.2	展開計算	224

C.1.3	化学ポテンシャルを含む項 . . . . .	231
C.1.4	$g(\theta_e)$ の展開計算 . . . . .	233
付録 D	$\bar{X}$ の導出 . . . . .	234

# 目次

1.1	インフレーション期を経た宇宙膨張の概念図(2006年のWMAPのプレスリリースより)。図の左端に時空の計量の劇的な膨張が描かれている。	11
1.2	(上)COBEと(下)WMAPが観測した宇宙背景放射の温度の揺らぎ	14
1.3	COBE(Cosmic Background Explorer; 宇宙背景放射探査機)	15
1.4	WMAP(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)	16
1.5	2007年に打ち上げ予定の宇宙探査機Planck。観測周波数域:30 - 850GHz。分解能: $> 5'$ 。	17
1.6	ACT(The Atacama Cosmology Telescope)。 観測周波数域:145GHz、220GHz、270GHz。分解能:1.7'、1.1'、0.9'。感度: $\mu\text{K}$ 。	18
1.7	銀河団RX J1347.5-1145のすばる可視光画像	22
1.8	銀河団RX J1347.5-1145のすばる望遠鏡	23
1.9	銀河団RX J1347.5-1145のChandraによるX線強度分布図	24
1.10	X線衛星Chandra	25
1.11	コンプトン散乱によるプランク分布からのずれ。実線が光子の初期分布(プランク分布)、点線が散乱後の光子の分布を表す。低周波数側、すなわち、エネルギーの低いところで強度が減少、高い所で増加していることが分かる。これは、光子が、温度約15 keVの電子に散乱された後のゆがみを、100倍した図になっている。横軸は、光子のエネルギー無次元量( $h\nu/k_B T_0$ 、 $T_0$ :宇宙背景放射の温度)としている。	32
1.12	銀河団までの距離を求める方法を示した図。まず、スニャエフゼルドビッチ効果の観測により銀河団の奥行き(1)が特定できる。銀河団を球対称と仮定すると、その奥行き(1)は銀河団の幅(2)( $r$ とおく)である。観測により、銀河団の見かけの角半径(3)( $\theta$ とおく)を知ることができる。 $r$ と $\theta$ を使って、銀河団までの距離(4)( $d$ とおく)を $d = r/\theta$ という計算から求めることができる。	33
1.13	OVRO(Owens Valley Radio Observatory)とBIMA(Berkeley-Illinois-Maryland Association)により観測した30 GHzにおけるSZ強度分布図。	34
1.14	The Sunyaev-Zel'dovich Array (SZA)	35
1.15	複数の周波数での観測を組み合わせ、銀河団の固有速度を決定を行った観測例。	37
1.16	SOUTH POLE TELESCOPE at Amundsen-Scott South Pole Station	38
2.1	5keV、10keV、15keVの場合の熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の曲線	45
2.2	相対論的に計算した結果と非相対論的に計算した結果を、銀河団温度5 keV、10 keV、15 keVの場合で重ね合わせたグラフ。	53

2.3	非相対論的計算結果に対する相対論的計算結果の相対的な変化を、銀河団温度 5 keV、10 keV、15 keV の場合で重ね合わせたグラフ。 . . . . .	54
2.4	非相対論的計算によるスニャエフ・ゼルドビッチ効果のクロスオーバー周波数周辺と相対論的計算によるスニャエフ・ゼルドビッチ効果のクロスオーバー周波数周辺を拡大したグラフ。“Rela”は相対論的計算結果で、“Non-Rela”は非相対論的計算結果である。 . . . . .	55
2.5	5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	56
2.6	5 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。 . . . . .	57
2.7	10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	58
2.8	10 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ . . . . .	59
2.9	15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	60
2.10	15 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ . . . . .	61
2.11	$Y_0 \sim Y_4$ までの項を取り入れた展開計算の数値積分に対する相対誤差を、銀河団温度 5 keV、10 keV、15 keV の場合で重ね合わせたグラフ。 . . . . .	62
2.12	5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	66
2.13	5 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。 . . . . .	67
2.14	5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	68
2.15	5 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。 . . . . .	69
2.16	10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	70
2.17	10 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。 . . . . .	71
2.18	10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	72
2.19	10 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。 . . . . .	73
2.20	15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	74
2.21	15 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。 . . . . .	75

2.22	15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。	76
2.23	15 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。	77
2.24	$Y_0 \sim Y_{10}$ までの項を取り入れた展開計算の数値積分に対する相対誤差を、銀河団温度 5 keV、10 keV、15 keV の場合で重ね合わせた結果。	78
2.25	$\Delta I/\tau(Y_i)$ の各項の縮尺を変えて表示したグラフ。 $(0 \leq i \leq 4)$	80
2.26	$\Delta I/\tau(Y_i)$ の各項の縮尺を変えて表示したグラフ。 $(4 \leq i \leq 7)$	81
2.27	$\Delta I/\tau(Y_i)$ の各項の縮尺を変えて表示したグラフ。 $(7 \leq i \leq 10)$	82
2.28	銀河団の温度が 10 keV のときの 2 回散乱成分のグラフ。	89
2.29	銀河団の温度が 5 keV、10 keV、15 keV のときの 2 回散乱成分を比較したグラフ。	90
2.30	銀河団の温度が 10 keV のときの 2 回散乱成分と 1 回散乱成分を比較したグラフ。	91
2.31	銀河団の温度が $k_B T_e = 5$ keV、10 keV、15 keV の場合について、1 回散乱成分と 2 回散乱成分を重ね合わせたグラフ。	92
2.32	1 回散乱成分に対する 2 回散乱成分の寄与を示すグラフ。	93
2.33	図 2.32 の低周波数部分を拡大したグラフ。	94
2.34	銀河団の温度が $k_B T_e = 5$ keV、10 keV、15 keV の場合について、非相対論的に計算した結果と相対論的に計算した結果を重ね合わせたグラフ。	95
2.35	銀河団の温度が $k_B T_e = 5$ keV、10 keV、15 keV の場合について、非相対論的に計算した結果と相対論的に計算した結果の相対誤差を示したグラフ。	96
2.36	5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。	97
2.37	5 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。	98
2.38	5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。	99
2.39	5 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。	100
2.40	5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。	101
2.41	5 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。	102
2.42	10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。	103
2.43	10 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。	104
2.44	10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。	105

2.45	10 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。 . . . . .	106
2.46	10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	107
2.47	10 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。 . . . . .	108
2.48	15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	109
2.49	15 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。 . . . . .	110
2.50	15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	111
2.51	15 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。 . . . . .	112
2.52	15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	113
2.53	15 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。 . . . . .	114
3.1	熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に対する運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のグラフ。 . . . . .	120
3.2	ある銀河団と観測者が成す角度 $\theta_\gamma$ が $0 \leq \theta_\gamma \leq \pi$ の範囲で変化する場合を想定した概念図。 . . . . .	128
3.3	ある銀河団と観測者が成す角度 $\theta_\gamma$ が $0 \leq \theta_\gamma \leq \pi$ の範囲で変化する場合について計算した運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のグラフ。 . . . . .	129
3.4	銀河団の温度 $k_B T_e = 5$ keV、10 keV、15 keV の場合の運動学的スニャエフゼルドビッチ効果のグラフを重ね合わせたグラフ。 . . . . .	130
3.5	銀河団の温度 $k_B T_e = 5$ keV、10 keV、15 keV の場合について、非相対論的に計算した結果と相対論的に計算した結果を重ね合わせたグラフ。 . . . . .	131
3.6	クロスオーバー周波数付近において、熱的スニャエフゼルドビッチ効果に対する運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の寄与を示したグラフ。 . . . . .	132
3.7	銀河団の温度 $k_B T_e = 5$ keV、10 keV、15 keV の場合について、熱的スニャエフゼルドビッチ効果に対する運動学的スニャエフゼルドビッチ効果の寄与を示す曲線を重ね合わせたグラフ。 . . . . .	133
3.8	5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $O(\beta\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e^2)$ 及び $O(\beta^2\theta_e)$ 、 $O(\beta\theta_e^3)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^2)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^3)$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	134
3.9	5 keV の場合で、数値積分に対する、 $O(\beta\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e^2)$ 及び $O(\beta^2\theta_e)$ 、 $O(\beta\theta_e^3)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^2)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^3)$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ . . . . .	135
3.10	10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $O(\beta\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e^2)$ 及び $O(\beta^2\theta_e)$ 、 $O(\beta\theta_e^3)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^2)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^3)$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。 . . . . .	136



3.11	10 keV の場合で、数値積分に対する、 $O(\beta\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e^2)$ 及び $O(\beta^2\theta_e)$ 、 $O(\beta\theta_e^3)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^2)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^3)$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ	137
3.12	15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $O(\beta\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e^2)$ 及び $O(\beta^2\theta_e)$ 、 $O(\beta\theta_e^3)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^2)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^3)$ までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。	138
3.13	15 keV の場合で、数値積分に対する、 $O(\beta\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e^2)$ 及び $O(\beta^2\theta_e)$ 、 $O(\beta\theta_e^3)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^2)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^3)$ までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ	139
3.14	相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のクロスオーバー周波数において、数値積分と各次数の展開計算の運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を重ね合わせたグラフ。	140
3.15	$O(\beta\theta_e^4)$ 及び $O(\beta^2\theta_e^3)$ までの項を取り入れた展開計算の数値積分に対する相対誤差を、銀河団温度 5 keV、10 keV、15 keV の場合で重ね合わせたグラフ。	141
3.16	$\Delta I/\tau(B_i)$ の各項の縮尺を変えて表示したグラフ。 ( $0 \leq i \leq 3$ )	143
3.17	$\Delta I/\tau(C_i)$ の各項の縮尺を変えて表示したグラフ。 ( $0 \leq i \leq 4$ )	144
3.18	$\Delta I/\tau(D_i)$ の各項の縮尺を変えて表示したグラフ。 ( $0 \leq i \leq 3$ )	145
3.19	銀河団の温度が $k_B T_e = 5\text{keV}$ の場合において、我々の数値積分に対する我々の展開の誤差 $\delta_{\text{present}}$ と Shimon と Rephaeli の展開の誤差 $\delta_{\text{SR}}$ を比較したグラフ。	147
3.20	銀河団の温度が $k_B T_e = 10\text{keV}$ の場合において、我々の数値積分に対する我々の展開の誤差 $\delta_{\text{present}}$ と Shimon と Rephaeli の展開の誤差 $\delta_{\text{SR}}$ を比較したグラフ。	148
3.21	銀河団の温度が $k_B T_e = 15\text{keV}$ の場合において、我々の数値積分に対する我々の展開の誤差 $\delta_{\text{present}}$ と Shimon と Rephaeli の展開の誤差 $\delta_{\text{SR}}$ を比較したグラフ。	149
A.1	電子と光子の座標上の位置や運動方向の概略図	171
D.1	コンプトン散乱における $\alpha^2$ のファイマン図	234

# 表 目 次

1.1	WMAP における 23GHz から 94GHz までの周波数領域にある 5 つの周波数バンド . . . . .	9
1.2	得られた宇宙論パラメータの数値 (Sperge ら [29]) . . . . .	12
1.3	得られた宇宙論パラメータの数値 (Bennett ら [30]) . . . . .	13
1.4	6 個の銀河団のガス温度と $\beta$ モデルパラメータ [20]。 . . . .	26
1.5	モデルにおける空間的な密度と射影密度 . . . . .	27
1.6	速度分散と脱出速度の相対的な値 . . . . .	27
1.7	個々の銀河団サンプルの観測データ . . . . .	36
2.1	クロスオーバー周波数 . . . . .	49

# 概要

ベル電話会社研究所の研究者であった Penzias と Wilson は、通信衛星の障害となる電波雑音の観測をしている過程で、宇宙背景放射を発見した。ロシアの宇宙物理学者スニャエフとゼルドビッチは、この放射に関連する宇宙物理学的現象を予言し、最初に研究を行った。その研究については、論文 [1–6] で発表されており、スニャエフ・ゼルドビッチ効果の理論式についても言及されている。その原理には、銀河が多数集まって構成される銀河団と呼ばれる領域が関わっている。その予言とは、宇宙のあらゆる方向からやってくる宇宙背景放射において、銀河団の方向からやってくるものは、銀河団の無い方向からやってくるものに対して強度が変化して見えるだろうという予言であった。そして、彼らによって、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の研究が行われた。一般的には、銀河団は CMB 系 (宇宙背景放射が等方的に観測される座標系) に対して固有運動 (宇宙膨張による後退速度を差し引いて残る、近傍の重力ポテンシャルによる速度が起源) をしていると考えられ、その場合、固有運動に起因する効果も生じる。これは、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と呼ばれ、1980 年に彼らによって、詳細な理論式が発表された。これらの研究は、銀河団についての研究やハッブル定数と呼ばれる宇宙論パラメータの推定、宇宙の構造形成についての解明といった様々な宇宙物理学的研究に重要な寄与を与える。

そのように理論的な期待がされる一方で、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の当初の観測は、 $(0.1 \sim 1)\text{mK}$  という微小な温度変化を測定するという困難に直面し、信頼できる観測結果は非常に少なかった。それよりもさらに一桁程小さい温度変化となって現れる運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果は、有意な値の検出はなかった。しかし、1990 年代の後半には、観測方法に進展があり、それに伴って、スニャエフ・ゼルドビッチ効果の重要性が高まった。

理論研究においても、目覚ましい進展があった。これまで、Sunyaev と Zeldovich [3] によって、1972 年に非相対論的に近似された熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果が導かれ、さらに、1980 年に Sunyaev と Zeldovich [5] によって、非相対論的に近似された運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果が導かれていた。1998 年に Tucker ら [7] による温度  $17.4 \pm 2\text{keV}$  の高温銀河団が発見され、スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算には、相対論的な補正が重要となることが指摘された。1998 年に伊藤、神山、野澤 [8] は、ボルツマン方程式の高次展開及び数値積分を行い、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の解析式と精度確認を行った。さらに、野澤、伊藤、神山 [9] は、その計算を運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算に応用した。その後、Sazonov と Sunyaev [10]、Challinor と Iles [11] によって運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算がされた。これらの三つの研究グループの結果は完全に一致している。しかし、2004 年に論文発表された Shimon と Rephaeli [12] の計算結果は、三つの研究グループの結果と一致しなかった。その後、野澤、伊藤、須田、大畑 [13] によって野澤、伊藤、神山 [9] よりもさらに高次の運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開計算が行われた。それに加え、未だ行われていなかった運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の数値積分が計算され、その結果を用いて、展開式の精度確認も行われた。

私の研究の主要なテーマは、野澤、伊藤、須田、大畑 [13] の計算結果と考察、そして、Shimon と Rephaeli [12]

による計算結果との比較及び確認計算の結果と考察である。観測の現状としては、従来よりも精度の向上した観測機がまもなく完成する予定であり、これまで困難であった運動学的成分の検出が期待されている。野澤、伊藤、須田、大畑 [13] の研究目的は、そのような現状に合わせて、従来よりも精度の良い理論値を求めるといことである。1998年の野澤、伊藤、神山 [9] による運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算よりもさらに高次の展開計算の結果及び、銀河団の電子ガス温度や周波数範囲に対する展開計算の精度確認の結果を報告する。また、展開計算との比較を行うために用いる厳密な数値積分のことについても触れる。さらに、展開計算結果と数値積分結果を用いて、Shimon と Rephaeli [12] による展開計算結果との比較を行った。その比較結果に対する考察と彼らの間違い箇所についての考察を報告する。これら主要なテーマの結果や考察を含め、それに関連する研究結果についても記述することにする。

# 第1章 序論

この章では、スニャエフ・ゼルドビッチ効果に深く関連する内容である宇宙背景放射及び銀河団について、1.1 及び 1.2 で述べ、その次に主要な研究テーマであるスニャエフ・ゼルドビッチ効果の紹介を 1.3 で行うことにする。

## 1.1 宇宙背景放射

### 1.1.1 宇宙背景放射の発見

1964 年、ベル電話会社研究所で、雑音電波の観測をしていた Arno Allan Penzias と Robert Woodrow Wilson は、不明な電波雑音が宇宙のあらゆる方向からやってきていることに注目した。1964 年 7 月から 1965 年 4 月まで観測を続けたところ、この電波雑音は、季節の変動とは関係なく、ある一定の強度を保っていることが明らかとなった。このことについては、1965 年の彼らの論文 [14] で述べられている。その論文によると、20 フィートのホーンレフレクタアンテナ<sup>1</sup>を用いた周波数 4080 MHz での天頂方向の有効雑音温度の測定は、期待されうる温度より 3.5 K 高い結果が得られた。この期待されうる温度から超過した温度は、彼らの観測の範囲内では、等方的で、偏向が無く、季節変動が無かった。天頂方向で測定された全アンテナ温度は 6.7 K である。その内、大気吸収による寄与は  $2.3 \pm 0.3$  K であり、抵抗損による寄与は  $0.8 \pm 0.4$  K であり、そして、地上放射に対するバックローブ<sup>2</sup>応答は、0.1 K 以下である。それらの寄与を取り除くと、周波数 4080 MHz での不明な雑音温度は  $3.5 \pm 1.0$  K と計算される。これが宇宙背景放射 (Cosmic Microwave Background Radiation) の発見である。彼らの発見は、宇宙が約 3K の熱放射で満たされていることを意味している。彼らの発見は、ビッグバン理論の基盤となった。

実は、彼らの観測による宇宙背景放射の発見よりも 16 年も前である 1949 年の論文において、George Gamow [15] の弟子である Ralph A. Alpher と Robert C. Herman [16] によって、熱放射の予言がされている。彼らの論文 [16] の中で次のようなことが述べられている。彼らが議論する宇宙膨張モデルは、放射と物質が一樣且つ等方的に混在している状態にあるモデルである。非定常モデルにおける相対論的エネルギー方程式は、

$$d \left[ \exp \left( \frac{1}{2} g(t) \right) \right] / dt = \pm [(8\pi/3)\rho \exp(g(t)) - R_0^{-2}]^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

と記述される。ここで、 $\rho$  は質量密度である。 $R$  は曲率半径であり、 $R$  は、 $R = R_0 \exp(g(t))$  で与えられる。

---

<sup>1</sup>電波が放射される開口面以外は全て導体で覆われているため、不要な方向からの電波を受信することなく、高性能のアンテナとして機能する。

<sup>2</sup>アンテナからの目的の方向への放射ビームで最大のはメインローブと呼ばれており、一方、目的の方向とは反対の方向への放射ビーム (サイドローブ) で最大のはバックローブと呼ばれている。因みに、メインローブに対するバックローブの割合が小さいアンテナが、性能に優れたアンテナである。

$\exp(g(t))$  は、線要素の空間部分における時間依存因子であり、

$$\exp\left(\frac{1}{2}g(t)\right) = l/l_0 = R/R_0 \quad (1.2)$$

である。ここで、 $l$  はある固有距離、 $l_0$  は長さの単位を表わしており、方程式 (1.1) に関する境界条件から、 $R_0$  とともに決定される。質量密度  $\rho$  は、空間の形状を決定する量であり、物質密度  $\rho_m$  と放射密度  $\rho_r$  の和である。物質の保存が成り立つ場合、

$$\rho_m l^3 = \text{constant} \quad (1.3)$$

という式が得られる。そして、宇宙が黒体放射を含んでいると仮定すると、

$$\rho_r l^4 = \text{constant} \quad (1.4)$$

という式が得られる。(1.3) 式と (1.4) 式から、

$$\rho_r \rho_m^{-4/3} = \text{constant} \quad (1.5)$$

という関係式が得られる。この式は、宇宙膨張の間は常に適応できる関係式である。現在の宇宙の物質密度を  $\rho_{m''}$ 、放射密度を  $\rho_{r''}$  とし、元素形成の期間にあった宇宙の物質密度を  $\rho_{m'}$ 、放射密度を  $\rho_{r'}$  とする。 $\rho_{m''}$  は、Hubble によって、

$$\rho_{m''} \simeq 10^{-30} \text{g/cm}^3 \quad (1.6)$$

と決定されている。一方、宇宙膨張を考慮に入れない場合の  $\rho_{m'}$  は、中性子捕獲理論をもとにして、 $5 \times 10^{-9} \text{g/cm}^3$  という値が得られるが、宇宙膨張を考慮に入れる場合は、約 100 倍に増加し、

$$\rho_{m'} \simeq 10^{-6} \text{g/cm}^3 \quad (1.7)$$

と決定される。簡単のため、

$$\rho_{r'} \simeq 1 \text{g/cm}^3 \quad (1.8)$$

という値を選ぶと、(1.5) 式より、

$$\rho_{r'} \rho_{m'}^{-4/3} \simeq 10^8 \quad (1.9)$$

である。したがって、現在の宇宙の物質密度と放射密度を用いた関係式は、

$$\rho_{r''} \rho_{m''}^{-4/3} \simeq 10^8 \quad (1.10)$$

と記述でき、そこへ、(1.6) 式を代入すると、

$$\rho_{r''} \simeq 10^{-32} \text{g/cm}^3 \quad (1.11)$$

という結果が得られる。この放射密度の値は、約 5 K の温度に対応している。彼らは、宇宙におけるこの平均温度は、宇宙膨張から由来している背景放射の温度として解釈できると述べている。

### 1.1.2 宇宙背景放射の起源

宇宙背景放射はビッグバン理論の証拠であると考えられている。ビッグバン理論によると、宇宙は約 137 億年前に高温・高密度の状態から始まり (図 1.1)、プラズマ (電離した電子とイオン) で満たされていたため、光は散乱され、直進できない状態であった。宇宙が膨張するにつれて温度が下がり、約 3000K (赤方偏移パラメータ  $z=1100$  程度である。なお、このときの宇宙の大きさは、現在の宇宙の大きさの約  $1/1100$  である。) まで低下すると、プラズマ中の電子は、水素の原子核である陽子に捕まり、電気的に中性の水素原子が形成された (再結合)。すると、光学的深さが減少するため、光が直進できるようになった。これが宇宙の晴れ上がりと呼ばれる過程である。そのときの光が現在に至るまでの宇宙膨張に伴って、温度約 3K まで低下した光である宇宙背景放射となって送られてきている。そのため、この宇宙背景放射は、宇宙初期の状態を知るための重要な情報を含んでいるとされている。

先程登場した宇宙物理学者の George Gamow [15] は、1946 年に宇宙膨張に関連して述べた論文を発表している。その内容は、以下のようである。

様々な化学元素の相対的存在量は、宇宙膨張の初期段階にある宇宙に存在している物理学的条件によって決まるということが、当時一般的に受け入れられている理論であった。宇宙膨張の初期段階では、軽い元素と重い元素のどちらにおいても相当に高い反応率に及ぶ程に、温度と密度が十分高い状態であった。これまで公にされているこの分野の研究においては、観測から得られた存在量曲線は、非常に高温且つ高密度での原子核結合エネルギーによって決まる平衡状態を示しているとされている。しかし、この考え方は、経験的事実との比較をしてみると、重大な困難に直面する。実際、一次近似においては、結合エネルギーは原子量の一次関数であるから、どのような平衡理論も必ず、完全に自然な元素系列に従って存在量が指数関数的に急速に減少するまでに至る。ところが、化学元素の内、前半に占める軽い元素については急速に減少するという現象が起きるため、より重い元素の存在量はほぼ一定の状態を保つということが知られている。そこで、「重い元素はより高温の状態の下で生成され、より軽い元素の adjustment が起きる頃には、既に重い元素の存在量の変動は停止状態であった」という仮定によりこの矛盾を説明することが求められるのだが、この説明は物理的に反していることが分かる。それは、ここで考えている温度 (約  $10^{10}$  K) と密度 (約  $10^6$  g/cm<sup>3</sup>) では、軽い元素と重い元素の両方において核変換率が同じになるように、核変換は自由中性子の吸収と消滅という過程から主に発生するからである。このことは、観測により得られる存在量曲線は、限られた時間間隔の中で起こるある種の非平衡過程を仮定することで説明できることを示している。膨張過程の研究では、以上の結論に対する有力な支持を与えるものがある。膨張宇宙の一般的な理論によると、膨張している宇宙におけるある長さの時間依存性は、

$$\frac{dl}{dt} = \left( \frac{8\pi G}{3} \rho l^2 - \frac{C^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.12)$$

で与えられる。ここで、 $G$  は重力定数、 $\rho$  は平均密度、そして  $R$  (実数あるいは虚数) は空間の曲率を表わす定数である。 $R$  が虚数のときは、無限に膨張していくことに対応しており、 $R$  が実数のときは、重力によって最終的に収縮に転じていくことに対応している。宇宙の現在の状態において、例として 1 g の物質を含む立方体を考える。現在の宇宙の平均密度は  $\rho_{\text{present}} \simeq 10^{-30}$  g/cm<sup>3</sup> であるから、ここで考えた立方体の辺の長さは  $l_{\text{present}} \simeq 10^{10}$  cm であることになる。Hubble によれば、現在の宇宙の膨張率は、 $1.8 \times 10^{-17}$  cm/s である。この値は、1 cm 当たりの値であるから、 $(dl/dt)_{\text{present}} \simeq l_{\text{present}} \times 1.8 \times 10^{-17}$  cm/s =  $1.8 \times 10^{-7}$  cm/s である。これらの数値を (1.12) 式に代入すると、

$$1.8 \times 10^{-7} \simeq \left( 5.7 \times 10^{-7} - C^2/R^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.13)$$

が得られる。膨張の現在の段階では、(1.13) 式の右辺にある  $( )^{1/2}$  内の第一項目は、第二項目に比べて無視できるほど小さいという結果を示している。(1.13) 式から、(一定である) 曲率半径の値を計算すると、

$$\begin{aligned} R &= \frac{C^2}{1.8 \times 10^{-7}} \sqrt{-1} \text{ cm} \\ &\simeq 1.7 \times 10^{-17} \sqrt{-1} \text{ cm} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} &\simeq 0.2 \times 10^{-16} \sqrt{-1} \text{ cm} \\ &= 0.2 \times \sqrt{-1} \text{ light year} \end{aligned} \quad (1.15)$$

という結果が得られる。宇宙の過去の歴史において、 $l$  が遙かにもっと小さい値をとり、それに伴って  $\rho$  がもっと大きい値をとった時期では、第一項目部分は、初期の膨張に対して減衰させる効果に対応する項として機能した。第一項目と第二項目が等しくなったとき、減衰から自由膨張へ切り替わった。すなわち、 $l$  が現在の値の約  $1/1000$  のときである。この時期に、物質が重力的に寄り集って、恒星、星団、銀河を形成したと考えられる。 $C^2/R^2 = -3.3 \times 10^{-14}$  として、(1.12) 式を、宇宙の平均質量密度が  $10^6 \text{ g/cm}^3$  のオーダーであった、もっと初期の段階へ適用してみる。その時点で  $l \simeq 10^{-2} \text{ cm}$  であると、

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &\simeq (5.7 \times 10^{-5} + 3.3 \times 10^{-14})^{\frac{1}{2}} \text{ cm/s} \\ &\simeq 0.01 \text{ cm/s} \end{aligned} \quad (1.16)$$

と計算される。この結果は、「宇宙の平均質量密度が  $10^6 \text{ g/cm}^3$  のオーダーであった時期では、膨張は高い膨張率で進行していたと考えられるため、この高密度の値は、たった 1 秒間に 1 桁程の割合で減少した」ということを意味している。そのような初期の段階に対して膨張式を推定するには大変注意が必要であるが、一方この式は、重力に対する慣性の膨張において、エネルギー保存の法則について説明しているにすぎないことを示している。元素合成の問題に話を戻すと、「急速な核反応に必要な条件は、非常に短時間しか存在していなかった」わけであるから、この時期に形成されたと考えられる平衡状態について言及するのは非常に危険である。急速な核変換を起こすことができる期間は、1 時間のオーダーと推定される自由中性子の  $\beta$  崩壊時間よりも遙かに小さいということも興味深いことである。従って、自由中性子が膨張初期に大量に存在していたとしたら、膨張している物質の平均密度と温度は、これらの中性子が陽子へ崩壊する前に、比較的小さい値へ減少していた。この比較的低温の集団を形成する中性子は、その後  $\beta$  放出の第二過程によって様々な原始種になる大きな中性子の複合体へと徐々に凝固していったと想定される。この考え方から、自然の元素系列に沿った相対的な存在量の減少は、放射吸収の連続的な過程から重い中性子複合体を形成するために必要なもっと長い時間によって引き起こされると解釈される。現在において水素の存在量が高いことについては、不活性な陽子へ崩壊していた初期の中性子の  $\beta$  崩壊と、中性子が重原子核単位を合成していた凝固過程との間の競合による結果であると考えられる。

### 1.1.3 宇宙背景放射の特性

宇宙背景放射は、 $2.726\text{K}$  の黒体輻射 (プランク分布とも呼ばれる。) と "ほぼ" 一致しており、また、"ほぼ" 等方的に (あらゆる方角から "ほぼ" 等しい強さで) 送られてきている。ここで、"ほぼ" と表現した理由は、宇宙背景放射が微小な非等方性 (揺らぎ) を示していることが分かっているからである。非等方性には、様々な成分が関わっている。非等方成分の中で最も大きな成分は双極成分と呼ばれる非等方成分である。そ



の大きさを温度に換算<sup>3</sup>すると、 $3.372 \pm 0.004$  mK [17] であり、全方向からくる宇宙背景放射の平均温度の約  $10^{-3}$  程度の寄与である。これは、固有運動する銀河系の中に我々観測者がいるために生じる成分である。その他には、宇宙の初期揺らぎと呼ばれる成分がある。その大きさを温度に換算すると、 $35 \pm 2$   $\mu$ K [17] であり、全方向からくる宇宙背景放射の平均温度の約  $10^{-5}$  程度の寄与である。約数 10 分から数度の角度スケールで見られる非等方成分である。そして実は、これら以外にも非等方成分が存在する。本研究の主要テーマであるスニャエフ・ゼルドビッチ効果による非等方成分である。その成分は、大きく分けて大小二つの成分をもっている。大きな成分の方は、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と呼ばれ、その典型的な大きさを温度に換算すると、 $0.1 \sim 1$  mK であり、全方向からくる宇宙背景放射の平均温度の  $10^{-4} \sim 10^{-5}$  程度の寄与である。小さな成分の方は、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と呼ばれ、その典型的な大きさを温度に換算すると、 $0.01 \sim 0.1$  mK であり、全方向からの宇宙背景放射の平均温度の  $10^{-5} \sim 10^{-6}$  程度の寄与である。それぞれの温度換算の計算については、2.2.2 と 3.2.2 で述べられている。

#### 1.1.4 宇宙背景放射の観測

##### COBE

1989年11月18日にNASAによって、COBE(Cosmic Background Explorer; 宇宙背景放射探査機) 衛星(図 1.3) が打ち上げられた。COBEの目的は、宇宙背景放射の観測から宇宙の形状を理解する助けとなる測定データを得ることであった。COBE衛星には、DMR(Differential microwave radiometer; 差分マイクロ波ラジオメータ)、FIRAS(Far InfraRed Absolute Spectrophotometer; 遠赤外絶対分光測光計)、DIRBE(Diffuse Infrared background experiment; 拡散赤外背景放射実験装置) といった実験装置が搭載されている。DMRは、宇宙背景放射のマッピング観測を行い、宇宙背景放射に含まれる非等方性を検出する装置である。一方、FIRASは、宇宙背景放射のスペクトルを測定し、黒体放射との違いがあるかどうかを調べる装置である。そして、DIRBEは、宇宙初期の赤外銀河を検出する装置である。COBEの観測について述べられている論文として、Matherらによって発表された1990年の論文[21]と1994年の論文[22]、そして、1999年の論文[23]などがある。これらの論文は、COBE衛星に搭載されているFIRASによる測定結果について書かれたものである。

1990年の論文[21]は、銀河系の北極の近傍領域で、FIRAS測定器による $1\text{cm}^{-1}$ から $20\text{cm}^{-1}$ ( $1\text{cm}$ から $0.5\text{mm}$ の波長)で観測された背景放射のスペクトルについての報告である。スペクトル分解能は $1\text{cm}^{-1}$ である。測定されたスペクトルは、温度 $2.735 \pm 0.06$  Kの黒体放射によく一致しており、黒体放射からのずれの大きさは、 $1\text{cm}^{-1}$ から $20\text{cm}^{-1}$ の範囲内において、ピーク強度の1%未満であるという結果を得ている。宇宙背景放射は、宇宙の全放射密度の大部分を占めるが、システム誤差を無くして測定することが非常に難しい。FIRASは、黒体放射に対する宇宙背景放射の非常に小さなずれ(0.1%)を測定するために設計されている。これまでの測定よりも、系統誤差の潜在的寄与を抑えるという点において改善されているのである。その改善は、次の状況により実現されている。

- 大気圏外で測定器を稼働する。
- アンテナを開放状態にした現場較正を実現する。

<sup>3</sup>ある周波数で観測された電波強度をプランク分布にフィットしたときに得られる温度(輝度温度と呼ぶ)を宇宙背景放射の温度から引いて換算する。

- 入力信号をゼロに調節する基準黒体放射との連続的差分比較を実現する。
- 極低温状態でのシールド環境において、ビームを生成する光学系を含む測定機器全体を稼働する。
- ビームを鮮明にし、メインビーム以外の発信源からの放射寄与を減少させるために、改善が施されたホーンアンテナを用いている。

FIRAS による結果である  $2.735 \pm 0.06$  K は、CN 遷移周波数で測定されたものである。その他の測定結果の例として、Meyer と Jura [24] による  $2.70 \pm 0.04$  K、Crane ら [25] による  $2.796(+0.014, -0.039)$  K、などがある。ここで紹介した Mather ら [21] による論文の結果は、Gush ら [26] による COBRA ロケット実験によって確証が得られている。

次に、1994 年の論文 [22] では、FIRAS による宇宙背景放射のスペクトル測定による温度の評価とコンプトン化パラメータと化学ポテンシャルの評価と上限値について報告している。ただし、この論文は、FIRAS からの新たな結果を報告する 4 編の論文の内の 1 編であり、宇宙背景放射スペクトルの測定結果と黒体放射からのずれに対するより厳密な制限の結果について報告している。因みに、1994 年に、Fixsen ら [27] は、測定における較正手順や系統誤差の発生源と処理について報告している。また、Fixsen ら [28] は、 $1\text{cm}^{-1}$  から  $20\text{cm}^{-1}$  の領域でのダイポールスペクトルの測定を報告している。彼らは、別の方法で決定したダイポールの方向と同じであること確認し、ダイポール成分の大きさは、 $3.343 \pm 0.016$  mK(95%信頼度)、温度  $2.714 \pm 0.02$  K(95%信頼度) という結果を得ている。

さて、この Mather ら [22] の論文で報告されている結果は、次の内容である。測定された温度は  $2.726 \pm 0.010$  K(95%信頼度) であり、誤差は彼らによって評価された温度測定誤差が大部分を占めている。黒体放射からの最大のずれは、 $3.4 \times 10^{-8}$  ergs  $\text{cm}^{-2}$   $\text{s}^{-1}$   $\text{sr}^{-1}$   $\text{cm}$  であり、ピーク強度のわずか 0.03%であった。 $2\text{cm}^{-1}$  から  $20\text{cm}^{-1}$  の領域での加重二乗平均平方根誤差は、ピーク強度のわずか 0.01%であった。そして、コンプトン化パラメータの上限値は  $|y| < 2.5 \times 10^{-5}$  であり、化学ポテンシャルの上限値は  $|\mu| < 3.3 \times 10^{-4}$  であった(双方とも 95%信頼度)。

さらに、1999 年の論文 [23] では、さらに改善された温度の値が報告されている。較正器の温度測定に対する解釈が改善されたことによって、不確定性の評価が改善され、 $2.725 \pm 0.002$  K (95%信頼度) という温度の値が得られている。

## WMAP

2001 年 6 月 30 日に NASA によって、2 機目の衛星である WMAP(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) 衛星 (図 1.4) が打ち上げられた。WMAP の目的は、高い角度分解能と感度を駆使して、宇宙背景放射の微小な揺らぎを全天にわたって観測し、宇宙の性質を記述する様々な理論の妥当性を検証することであった。COBE と WMAP によるそれぞれの宇宙背景放射の温度揺らぎを図 1.2 に示す。図 1.2 から、COBE による揺らぎの測定結果より WMAP による測定結果の方が、より細部に至る温度の揺らぎを測定していることが分かる。WMAP による観測結果に関連した論文は、2003 年の Spergel ら [29] による論文や同年の Bennett ら [30] による論文がある。

Spergel ら [29] による論文は、23GHz から 94GHz までの周波数範囲内にある 5 つの周波数バンド (表 1.1) で得られた全天のマイクロ波マップについての報告である。結論は次のようにまとめられている。

項目	K band	Ka band	Q band	V band	W band
波長 [mm]	13	9.1	7.3	4.9	3.2
周波数 [GHz]	22.8	33.0	40.7	60.8	93.5

表 1.1: WMAP における 23GHz から 94GHz までの周波数領域にある 5 つの周波数バンド

- WMAP は、5 つに和歌得られた幅広い周波数バンドで高精度かつ全天のマップが得られた。これらのマップは、宇宙論モデルを評価するために用いることができる。
- システム誤差に対して厳密な制限を設定した。較正は、CMB ダイポールの変調を基にしており、0.5% よりも正確な精度を実現する。
- 銀河系及び系外銀河の前景放射による CMB の非等方成分を分離する技術力を証明した。さらに、銀河系の信号を最小限に抑えた CMB マップを作成した。
- CMB ダイポールについて、 $(l, b) = (263.85 \pm 0.1, 48.25 \pm 0.04)$  の方向に  $3.346 \pm 0.017$  mK という新たな結果を得た。ここで、 $l$  は銀河系の経度であり、 $b$  は銀河系の緯度を表わす。
- CMB の非等方成分の非ガウスの性質について新たな制限を設定した。二次の非ガウス項の結合係数は、 $-58 < f_{NL} < 134$  (95%信頼度; [31]) という制限が得られている。
- 従来よりも精度の優れた角パワースペクトルを得た。
- 宇宙論に重要な制限を設定できるほどの十分な精度で温度偏向相関の角パワースペクトルを初めて観測した。
- $\tau = 0.17 \pm 0.04$  という光学的深さから再電離の時期を評価した。その結果、イオン化シナリオの範囲内について、赤方偏移  $z_r = 20_{-9}^{+10}$  で、ビッグバンの  $t_r = 180_{-80}^{+220}$  Myr (95%信頼度) 後に再電離の時期があったことを示していた。
- 宇宙論パラメータをデータにフィットさせた。ビッグバン理論とインフレーションに一致する結果を確認した。
- 非べき乗則インフレーションモデルを基にした多数のパラメータの値と不確定性を得た。宇宙論パラメータの数値は表 1.2(彼らの論文中の Table 3) のように得られた。

Bennett ら [30] による論文は、モデルのベストフィット宇宙論パラメータを求めるために、WMAP データと、その他の微小スケール CMB 実験 (ACBAR: Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver, CBI: Cosmic Background Imager)、2dFGRS (Two-Degree Field Galaxy Redshift Survey) 測定、そして、Ly $\alpha$  forest データを組み合わせた結果を報告している。宇宙論パラメータの結果は、表 1.3(Bennett ら [30] の論文中の Table 10) に示している。

## 宇宙背景放射の将来の観測

近い将来には、WMAP以上の精度と分解能を持つ観測機による宇宙背景放射の観測実験が計画されている。最も近いものが、2007年に打ち上げ予定の宇宙探査機 Planck(観測周波数域：30 - 850GHz、分解能： $> 5'$ ) 衛星 (図 1.5) である。

宇宙背景放射の観測の一環として、宇宙背景放射に関連があるスニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測 (電波領域で観測される) は、従来よりも高精度の測定が行われる予定である。Planck 以外に、SPT、ACT(図 1.6)、QUIET、APEX、AMI など、宇宙背景放射の観測実験が、銀河団の深部に至る領域の観測を行う予定である。

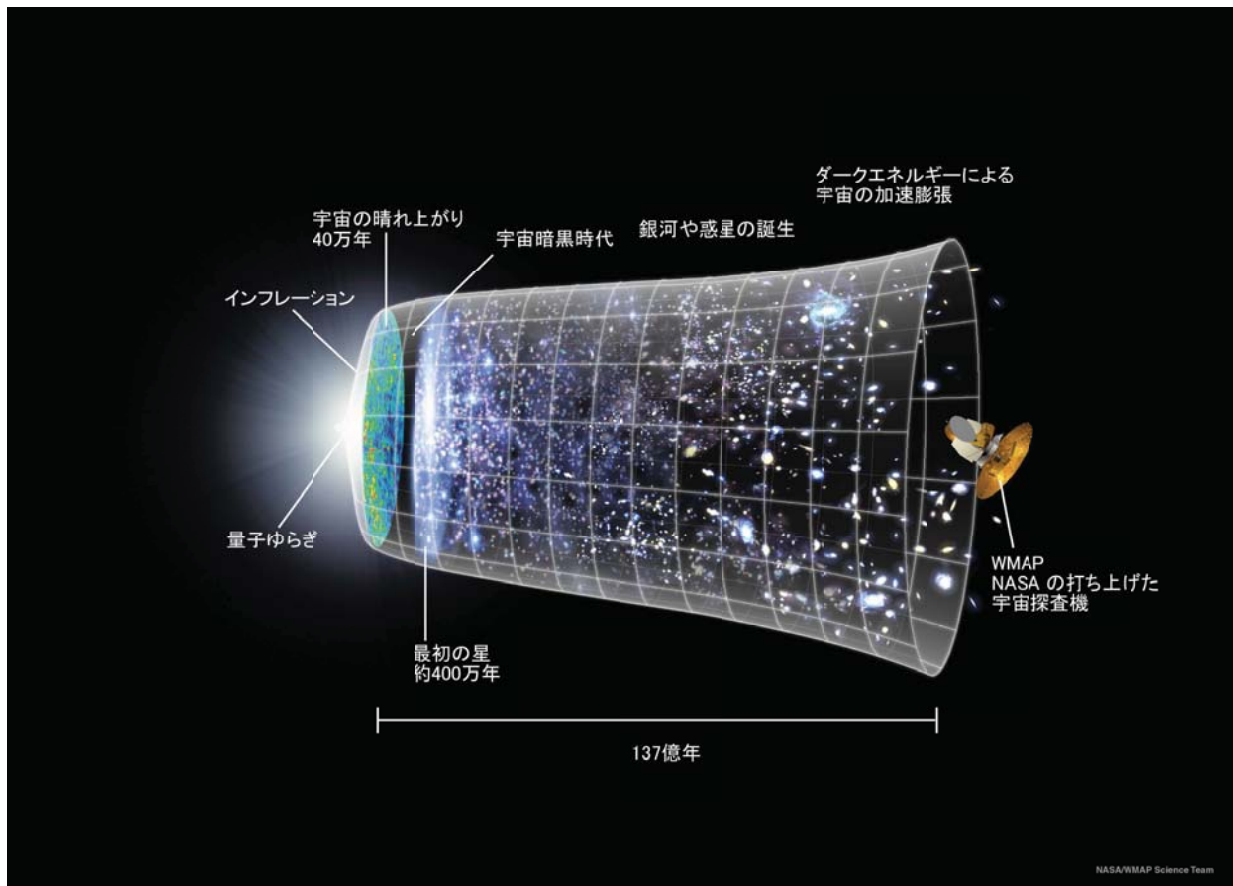


図 1.1: インフレーション期を経た宇宙膨張の概念図 (2006 年の WMAP のプレスリリースより)。図の左端に時空の計量の劇的な膨張が描かれている。

Table 3. “Best” Cosmological Parameters

Description	Symbol	Value	+ uncertainty	– uncertainty
Total density	$\Omega_{tot}$	1.02	0.02	0.02
Equation of state of quintessence	$w$	$< -0.78$	95% CL	—
Dark energy density	$\Omega_\Lambda$	0.73	0.04	0.04
Baryon density	$\Omega_b h^2$	0.0224	0.0009	0.0009
Baryon density	$\Omega_b$	0.044	0.004	0.004
Baryon density ( $\text{cm}^{-3}$ )	$n_b$	$2.5 \times 10^{-7}$	$0.1 \times 10^{-7}$	$0.1 \times 10^{-7}$
Matter density	$\Omega_m h^2$	0.135	0.008	0.009
Matter density	$\Omega_m$	0.27	0.04	0.04
Light neutrino density	$\Omega_\nu h^2$	$< 0.0076$	95% CL	—
CMB temperature (K) <sup>a</sup>	$T_{\text{cmb}}$	2.725	0.002	0.002
CMB photon density ( $\text{cm}^{-3}$ ) <sup>b</sup>	$n_\gamma$	410.4	0.9	0.9
Baryon-to-photon ratio	$\eta$	$6.1 \times 10^{-10}$	$0.3 \times 10^{-10}$	$0.2 \times 10^{-10}$
Baryon-to-matter ratio	$\Omega_b \Omega_m^{-1}$	0.17	0.01	0.01
Fluctuation amplitude in $8h^{-1}$ Mpc spheres	$\sigma_8$	0.84	0.04	0.04
Low- $z$ cluster abundance scaling	$\sigma_8 \Omega_m^{0.5}$	0.44	0.04	0.05
Power spectrum normalization (at $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ ) <sup>c</sup>	$A$	0.833	0.086	0.083
Scalar spectral index (at $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ ) <sup>c</sup>	$n_s$	0.93	0.03	0.03
Running index slope (at $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ ) <sup>c</sup>	$dn_s/d \ln k$	-0.031	0.016	0.018
Tensor-to-scalar ratio (at $k_0 = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ )	$r$	$< 0.90$	95% CL	—
Redshift of decoupling	$z_{\text{dec}}$	1089	1	1
Thickness of decoupling (FWHM)	$\Delta z_{\text{dec}}$	195	2	2
Hubble constant	$h$	0.71	0.04	0.03
Age of universe (Gyr)	$t_0$	13.7	0.2	0.2
Age at decoupling (kyr)	$t_{\text{dec}}$	379	8	7
Age at reionization (Myr, 95% CL))	$t_r$	180	220	80
Decoupling time interval (kyr)	$\Delta t_{\text{dec}}$	118	3	2
Redshift of matter-energy equality	$z_{\text{eq}}$	3233	194	210
Reionization optical depth	$\tau$	0.17	0.04	0.04
Redshift of reionization (95% CL)	$z_r$	20	10	9
Sound horizon at decoupling ( $^\circ$ )	$\theta_A$	0.598	0.002	0.002
Angular size distance (Gpc)	$d_A$	14.0	0.2	0.3
Acoustic scale <sup>d</sup>	$\ell_A$	301	1	1
Sound horizon at decoupling (Mpc) <sup>d</sup>	$r_s$	147	2	2

<sup>a</sup>from COBE (Mather et al. 1999)<sup>b</sup>derived from COBE (Mather et al. 1999)<sup>c</sup> $\ell_{\text{eff}} \approx 700$ <sup>d</sup> $\ell_A \equiv \pi \theta_A^{-1}$   $\theta_A \equiv r_s d_A^{-1}$ 

表 1.2: 得られた宇宙論パラメータの数値 (Sperge ら [29])

Table 10. Basic and Derived Cosmological Parameters: Running Spectral Index Model<sup>a</sup>

	Mean and 68% Confidence Errors
Amplitude of fluctuations	$A = 0.83_{-0.08}^{+0.09}$
Spectral Index at $k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$	$n_s = 0.93 \pm 0.03$
Derivative of Spectral Index	$dn_s/d \ln k = -0.031_{-0.018}^{+0.016}$
Hubble Constant	$h = 0.71_{-0.03}^{+0.04}$
Baryon Density	$\Omega_b h^2 = 0.0224 \pm 0.0009$
Matter Density	$\Omega_m h^2 = 0.135_{-0.009}^{+0.008}$
Optical Depth	$\tau = 0.17 \pm 0.06$
Matter Power Spectrum Normalization	$\sigma_8 = 0.84 \pm 0.04$
Characteristic Amplitude of Velocity Fluctuations	$\sigma_8 \Omega_m^{0.6} = 0.38_{-0.05}^{+0.04}$
Baryon Density/Critical Density	$\Omega_b = 0.044 \pm 0.004$
Matter Density/Critical Density	$\Omega_m = 0.27 \pm 0.04$
Age of the Universe	$t_0 = 13.7 \pm 0.2 \text{ Gyr}$
Reionization Redshift <sup>b</sup>	$z_r = 17 \pm 4$
Decoupling Redshift	$z_{dec} = 1089 \pm 1$
Age of the Universe at Decoupling	$t_{dec} = 379_{-7}^{+8} \text{ kyr}$
Thickness of Surface of Last Scatter	$\Delta z_{dec} = 195 \pm 2$
Thickness of Surface of Last Scatter	$\Delta t_{dec} = 118_{-2}^{+3} \text{ kyr}$
Redshift of Matter/Radiation Equality	$z_{eq} = 3233_{-210}^{+194}$
Sound Horizon at Decoupling	$r_s = 147 \pm 2 \text{ Mpc}$
Angular Size Distance to the Decoupling Surface	$d_A = 14.0_{-0.3}^{+0.2} \text{ Gpc}$
Acoustic Angular Scale <sup>c</sup>	$\ell_A = 301 \pm 1$
Current Density of Baryons	$n_b = (2.5 \pm 0.1) \times 10^{-7} \text{ cm}^{-3}$
Baryon/Photon Ratio	$\eta = (6.1_{-0.2}^{+0.3}) \times 10^{-10}$

<sup>a</sup>Fit to the WMAP, CBI, ACBAR, 2dFGRS and Lyman  $\alpha$  forest data

<sup>b</sup>Assumes ionization fraction,  $x_e = 1$

<sup>c</sup> $\ell_A = \pi d_C / r_s$

表 1.3: 得られた宇宙論パラメータの数値 (Bennett ら [30])

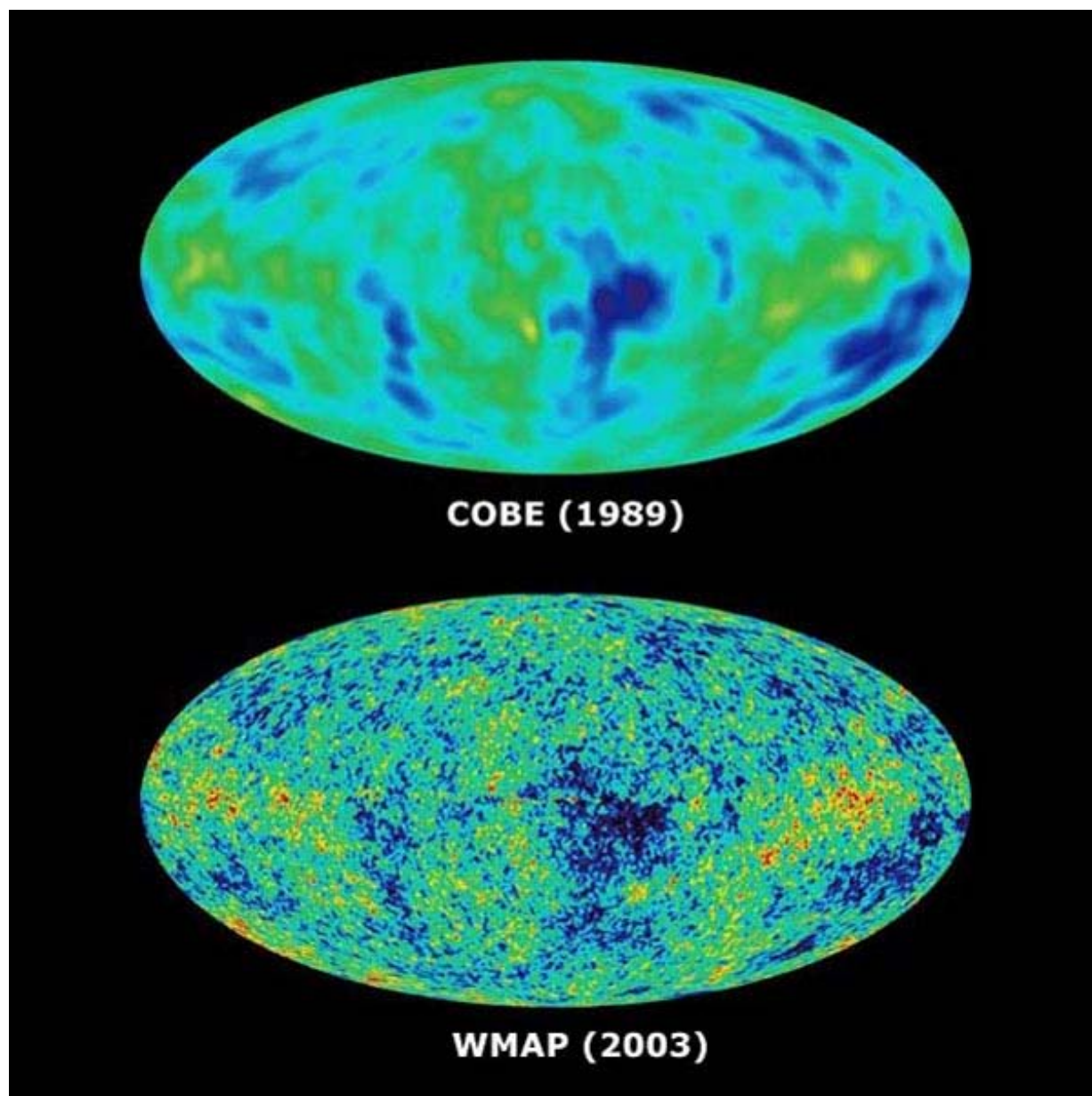


図 1.2: (上)COBE と (下)WMAP が観測した宇宙背景放射の温度の揺らぎ



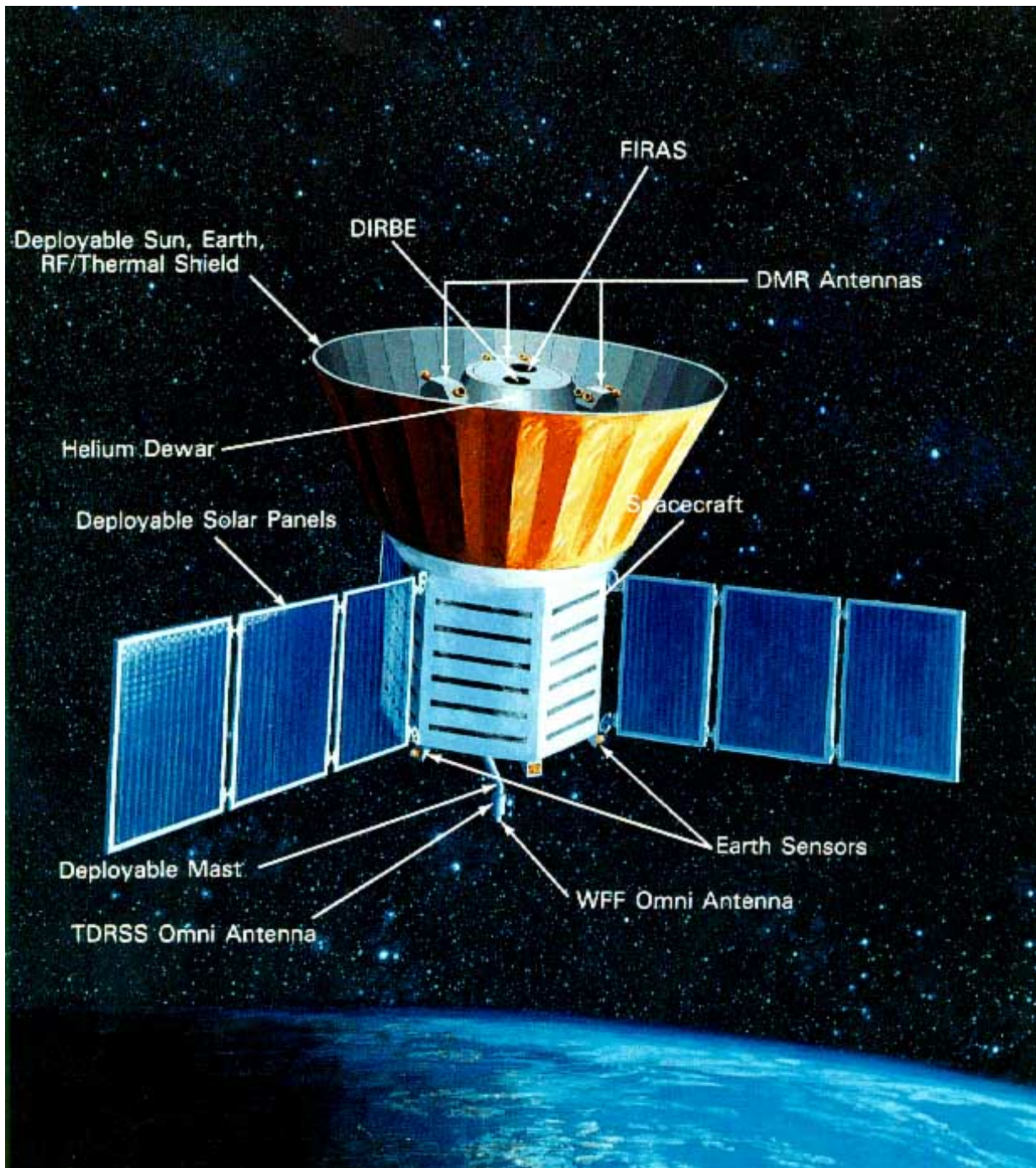
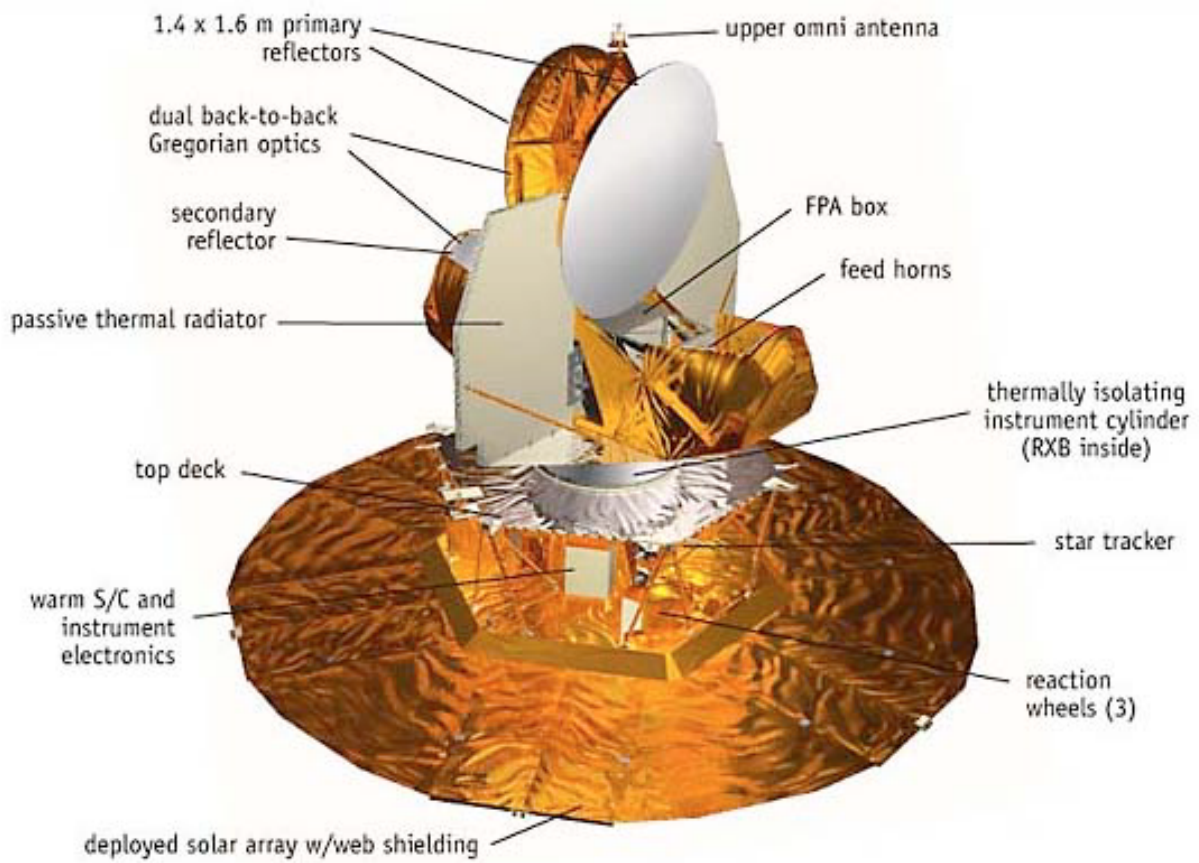


图 1.3: COBE(Cosmic Background Explorer; 宇宙背景放射探查機)



☒ 1.4: WMAP(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)



図 1.5: 2007 年に打ち上げ予定の宇宙探査機 Planck。観測周波数域：30 - 850GHz。分解能： $> 5'$ 。

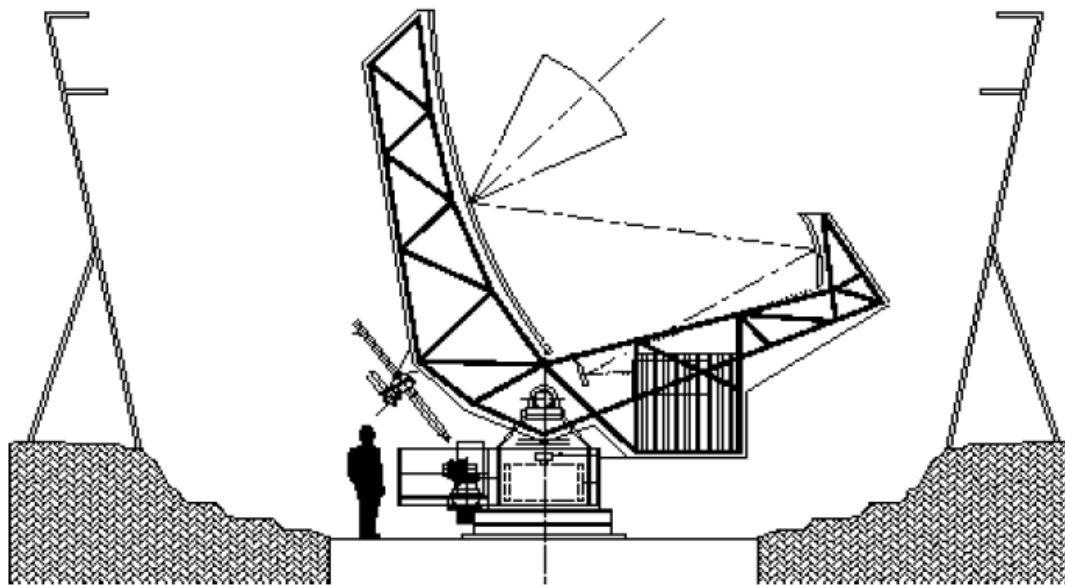


図 1.6: ACT(The Atacama Cosmology Telescope)。

観測周波数域 : 145GHz、220GHz、270GHz。分解能 : 1.7'、1.1'、0.9'。感度 :  $\mu\text{K}$ 。

## 1.2 銀河団

### 1.2.1 銀河団の特性

銀河団は、数十個から千個程度の銀河の集まりである。これらの銀河団は、典型的には4~6 Mpc(1Mpc $\simeq$  3.26 光年) 程度の領域に集中している。重力的に平衡状態に達している系としては、宇宙で最大規模のものと考えられており、その質量は、 $10^{14} \sim 10^{15} M_{\odot}$  ( $1M_{\odot} \simeq 1.98 \times 10^{30} \text{kg}$  であり、太陽質量を意味する。) 程もあり、主に銀河、銀河団プラズマ、ダークマター (暗黒物質) から成っている。それぞれの質量の割合は、銀河質量が全体の数%程度で、銀河団ガスが約20%、ダークマターが約80%という構成になっている。実際に可視光で見えている部分は、銀河団質量のほんの一部だけである。また、銀河団ガスの密度は $10^{-3} \text{cm}^{-3}$  程度という非常に希薄な状態である。しかし、銀河団のスケールの巨大さゆえに、そこに含まれている銀河団ガスは、全体の2割を占めるのである。

### 1.2.2 異なる波長で見た銀河団

宇宙は、観測する波長によって全く異なった姿を見せる。その一つとして銀河団が挙げられる。まずは、可視光で捉えた図 1.7 を紹介する。図 1.7 は、RX J-1347.5-1145 と呼ばれる銀河団 (赤方偏移  $z=0.451$ 、約50 億光年の距離にある。) のすばる望遠鏡 (図 1.8) による可視光イメージである。光り輝いている無数の各天体が銀河である。次に同じ銀河団を X 線天文衛星 Chandra (図 1.10) で観測した結果 (図 1.9) を示す。図 1.9 は銀河間の領域からの X 線放射が起きている様子を示しており、可視光では捉える事ができない様子をとらえている。これは、非常に高温な銀河団ガスの熱的な放射によるものである。因みに、典型的な銀河団のガス温度は5~15 keV である。例えば、5 keV で約  $6 \times 10^7 \text{K}$  程度である。また、銀河団における銀河の運動や銀河団ガスの分布は詳細に解析されている。これらの銀河や高温プラズマは、その質量をはるかに上回る大量のダークマターによって重力的に閉じ込められていると考えられている。2002 年に Allen ら [32] によって、Chandra 衛星による銀河団 RX J-1347.5-1145 の観測の論文が発表されている。その銀河団は、X 線の輝度が最も大きい銀河団として知られている。彼らの報告は、Komatsu ら [33] によって報告されたスニャエフゼルドビッチ効果が増大している領域と同じ位置にあるメイン X 線ピークの南東へ約 20 秒の位置に、比較的高温で輝度が高い X 線放射をしている領域を発見したというものであった。彼らによると、その領域は、最近に起きたサブクラスター同士のマージングから由来する衝撃を受けたガスを含む領域と考えられる。また、彼らは、南東象限のデータを含め、銀河団の密度、温度、質量プロファイルを測定した。

この他にも近年になって、大変活発に行われるようになってきた方法が電波による観測である。本研究の主要テーマであるスニャエフ・ゼルドビッチ効果も観測対象の一つである。これに関しては、後に詳細に記述する。

### 1.2.3 高温の銀河団ガス

銀河団の X 線観測から、熱制動放射の強度はガス密度の2乗に比例するという性質を使って、銀河団中でのガス密度の分布を推定する事が出来る。ただし、実際の銀河団は3次元構造を持っているのに対し、観測から得られるデータは、2次元へ投影したものになるので、銀河団の構造が球対称であるという仮定をする

必要がある。銀河団ガスの密度分布は、銀河団半径の関数として、 $\beta$  モデル ([18]、[19]) と呼ばれる近似式：

$$n(r) = n_0 \left\{ 1 + \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right\}^{-\frac{3}{2}\beta} \quad (1.17)$$

で表わされる。ここで、 $n$  は半径  $r$  での個数密度、 $n_0$  は、その中心での値 ( $10^{-2} \sim 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$  程度)、 $a$  はコア半径 (100 ~ 300 kpc)、 $\beta$  は、 $\beta$  パラメータである。この式は、ガスだけでなく、銀河の個数密度の分布にも適用する事ができ、一般に  $\beta = 1$  としたものが銀河分布をよく再現する。この場合は特に King モデルと呼ばれる。高温ガスの分布を多くの銀河団について調べた結果、 $\beta = 0.6 \sim 0.7$  に近い値を示す事が知られている。つまりガス分布の方が銀河分布より平坦で、大きな半径まで広がっている事になる。

いくつかの銀河団についての温度と  $\beta$  パラメータを、Bensson ら [20] による 2003 年の論文で掲載されている表 1.4(彼らの論文にある TABLE 4 の一部分) により紹介しておく。銀河団の温度について見てみると、10 keV 前後のものが多いことが確認できる。ただし、1998 年に Tucker ら [7] によって、 $17.4 \pm 2.5 \text{ keV}$  という非常に高温な銀河団 1E 0657-56 が報告されている。

その他に銀河団に関連する論文として、1972 年の King [34] による論文には、以下の内容が述べられている。

かみのけ座銀河団にフィットするモデルに関する密度、密度の二乗、速度分散、脱出速度は数値計算によって、空間的な値と平面へ射影した値が得られている。また、全放射量も計算されている。ダークマターが高温ガスであるという仮定の妥当性を考えるうえで、高精度な Lyman- $\alpha$  での観測が必要とされている。

かみのけ座銀河団の構造研究の一環として、銀河団内にある銀河の密度分布を表現するための滑らかな曲線の導出が行われている。しかし、グラフの形状分かっているが、天空の平面上へ射影された二次元的な様子しか分かっていない。密度曲線は、ガウス速度分布を基にした自己重力力学モデル群から得られるが、それは力学的な方法というよりは、純粹に経験的な方法である。半径が 200 分角を超えた領域では、曲線は推定曲線であるため、外側領域では、かみのけ座銀河団のデータと一致しない可能性がある。一方、実際の銀河団の全質量は不確定であるが、200 分角以内では、密度とそれを用いた累積計算は妥当な結果を与える。表 1.5(彼らの論文にある TABLE 1) の密度  $\rho$  と射影密度  $\phi$  の数値は、次の関数：

$$\rho_a = \frac{1}{(1 + r^2)^{3/2}} \quad (1.18)$$

$$\phi_a = \frac{2}{1 + r^2} \quad (1.19)$$

で近似されることが分かる。中心 ( $r = 0$ ) 付近では、近似が良く成り立つことが分かる。因みに  $\rho/\rho_a$  と  $\phi/\phi_a$  は、一般的にゆっくりと変化する関数であるから補間が容易である。

ところで、表 1.5 は、中心の密度が 1 に設定されており、任意の単位で与えられている。Rood ら [?] はこのモデルをかみのけ座銀河団にフィットすることで、距離 (コア半径) の単位が 6'4 であることを確認している。ハッブル定数を  $H = 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  としたとき、それは、0.171 Mpc の距離に相当する。そして、重力的に安定であることを仮定すると、中心質量密度は  $6.4 \times 10^{-3} M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$  であり、中心ルミノシティ密度は  $2.8 \times 10^{-5} L_{\odot} \text{ pc}^{-3}$  であることが分かっている。また、モデルから、視線方向の速度分散と脱出速度は表 1.6(彼らの論文にある TABLE 2) で与えられる。速度分散の単位は、Rood らのフィッティングから決定されており、 $1060 \text{ km s}^{-1}$  である。

応用事項としては、銀河団内のダークマターを構成するとされているイオン化ガスの放射量の計算がある。Rood らは、ダークマターは銀河と類似した空間分布をしているに違いないと説明している。仮にそうでなければ、銀河団のコアとエンベロープを安定にする力を生成できないからである。ゆえに、表 1.6 の密度分

布は、近似的にダークマターの密度分布を示していると考えられる。そのような性質を持つガスが銀河団内に存在しているということを確認するには、ガスの Lyman- $\alpha$  放射を用いれば、最も精密な観測が行えると考えられる。これを受けて、Henry [35] は、観測される Lyman- $\alpha$  フラックスに対して上限を与えるために、かみのけ座銀河団の領域においてロケットスキャンを行った。さらに、有限半径においてはガス密度が一定であると仮定して、フラックスの期待値を計算した。これに対して、King [34] は、一定密度という仮定による結果と、もっと正確な  $\int \rho^2 dV$  ( $V$  は体積を表わす。) の計算の結果を比較を行った。まず、密度が一定の場合は、

$$\int \rho^2 dV = \rho^2 V = (\rho V)^2 / V = M^2 / V \quad (1.20)$$

という計算ができる。ここで、 $M$  はガスの全質量である。Henry [35] は、質量  $M = 1.2 \times 10^{15} M_\odot$ 、70 Mpc の距離にある見かけの長さ  $45'$  の直径をもつ銀河団を仮定した。その値から (1.20) 式を計算すると、

$$\begin{aligned} M^2 / V &= \frac{(1.2 \times 10^{15})^2}{\frac{4\pi}{3} \left( \frac{1}{2} \times 70 \times 10^6 \times \frac{45}{60} \times \frac{\pi}{180} \right)^3} M_\odot^2 \text{ pc}^{-3} \\ &\simeq 3.56 \times 10^{12} M_\odot^2 \text{ pc}^{-3} \end{aligned} \quad (1.21)$$

という結果を得る。 $43'1 < 45' < 58'8$  であるからと、表 1.5 で  $\int \rho^2 dV = 2.35$  であることが分かる。実際の銀河団の計算の場合、スケールファクター  $\rho_0^2 r_c^3$  を掛けて計算する。距離に関係なく同じハッブル定数を用いている Henry の計算と比較するため、彼らは、距離 70 Mpc に対応する  $H = 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  を用いている。コア半径は  $6'4$  であるから、 $r_c = 70 \times 10^6 \times \frac{6.4}{60} \times \frac{\pi}{180}$  である。質量は  $H^{-1}$  に比例することから、 $\rho_0 = 1.14 \times 10^{-2} M_\odot \text{ pc}^{-3}$  となる。よって、 $\int \rho^2 dV = \rho_0^2 r_c^3 \times 2.35 \simeq 6.74 \times 10^{11} M_\odot^2 \text{ pc}^{-3}$  という結果が得られる。この結果は Henry [35] による結果より 5 倍ほど小さい。King [34] は、ガスにおいて起こりうる物理状態に対して Henry [35] の制限が緩いためであると結論付けている。

最後に、深刻な不確定性の存在について述べている。一つ目は、観測される密度に対する滑らかな曲線によるフィッティングには、いくらかの自由度が存在するということである。Rood らは、この自由度は  $M/L$  の決定には僅かな影響しか与えないということを説明しているが、 $\int \rho^2 dV$  の決定にはかなりの影響がある。二つ目は、ダークマターの質量が銀河と同じように分布するという Rood らによる評価にもいくらかの自由度が存在すると考えられるということである。これについての予備研究では、ダークマターの質量として条件を満たす別の分布を適用すると、放射量の値が約 3 倍の範囲で変動することが示されている。総合的に判断すると、かみのけ座銀河団におけるガスの存在について結論を出すのは早すぎると考えられるが、Henry [35] が指摘しているように、さらなる Lyman- $\alpha$  の観測によって、近い将来にはこの問題は解決するはずであると、King [34] は述べている。

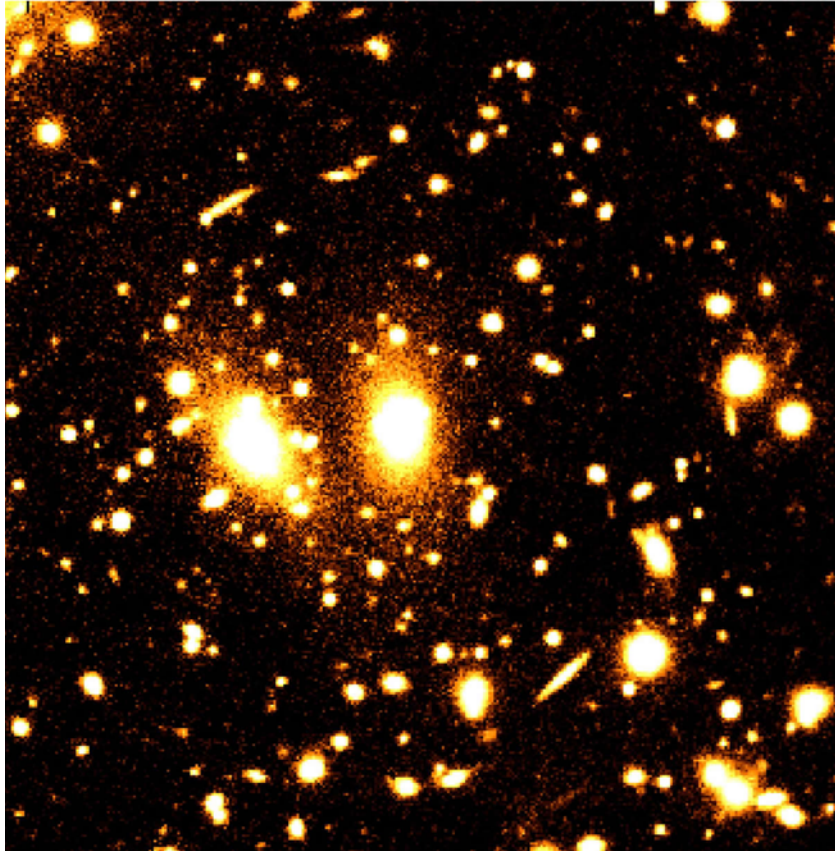


図 1.7: 銀河団 RX J1347.5-1145 のすばる可視光画像



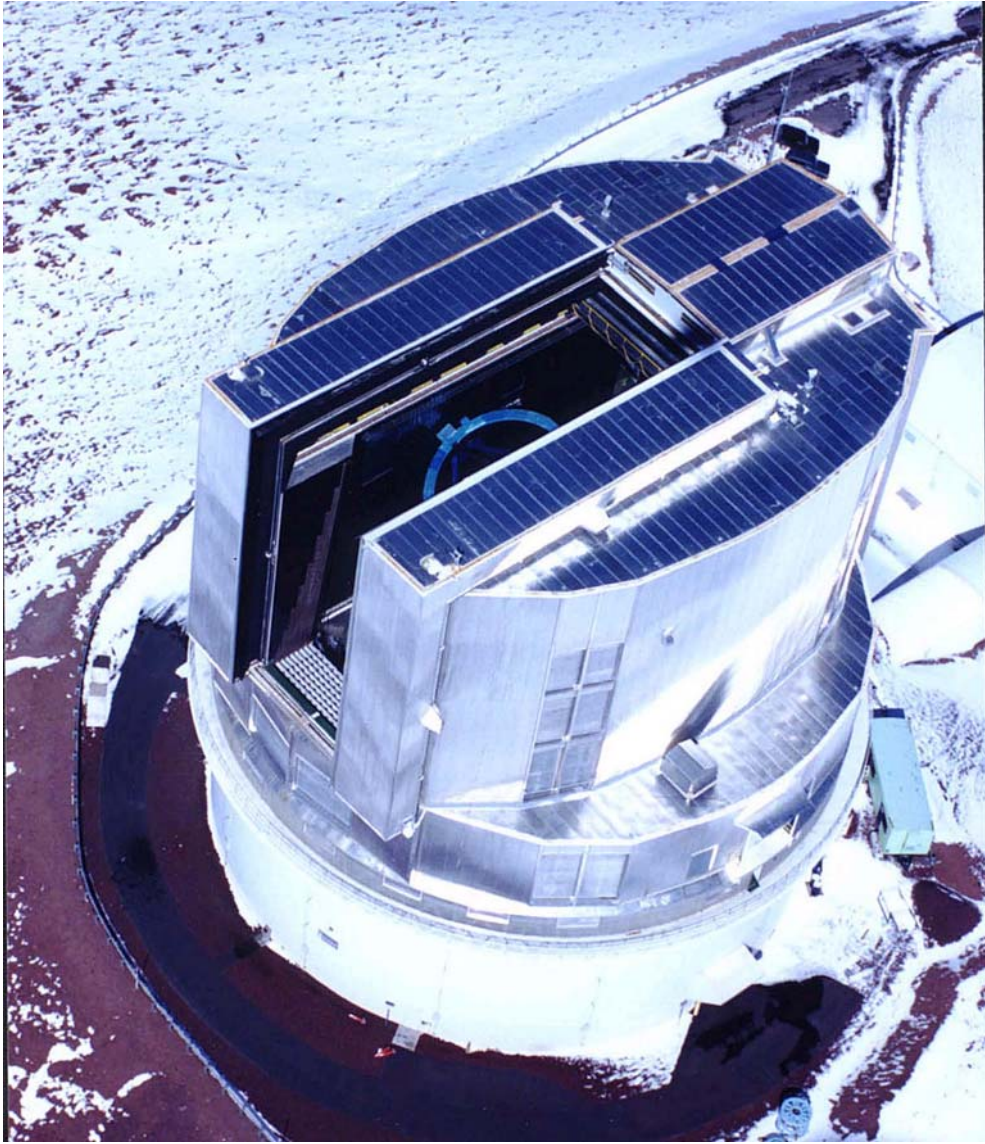


図 1.8: 銀河団 RX J1347.5-1145 のすばる望遠鏡

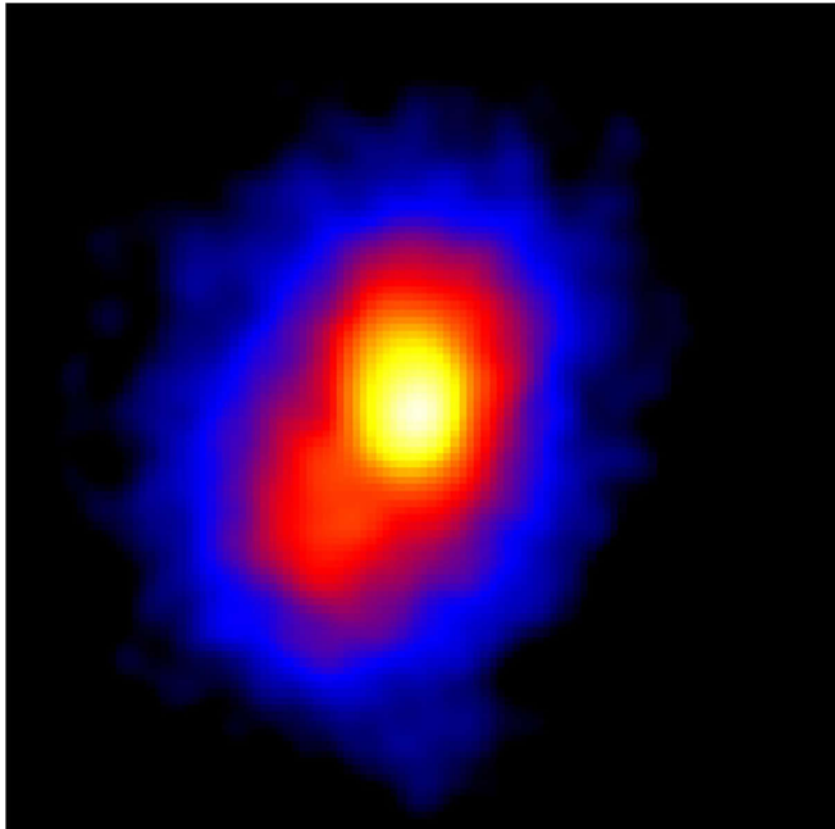


図 1.9: 銀河団 RX J1347.5-1145 の Chandra による X 線強度分布図



图 1.10: X 線衛星 Chandra

Cluster	$kT_e$ (keV)	$\beta$
A2261 .....	$8.82^{+0.37}_{-0.32}$	$0.516^{+0.014}_{-0.013}$
A2390 .....	$10.13^{+1.22}_{-0.99}$	$0.67^a$
Zw 3146 .....	$6.41^{+0.26}_{-0.25}$	$0.74^a$
A1835 .....	$8.21^{+0.19}_{-0.17}$	$0.595^{+0.007}_{-0.005}$
Cl 0016.....	$7.55^{+0.72}_{-0.58}$	$0.749^{+0.024}_{-0.018}$
MS 0451.....	$10.4^{+1.0}_{-0.8}$	$0.806^{+0.052}_{-0.043}$

表 1.4: 6 個の銀河団のガス温度と  $\beta$  モデルパラメータ [20]。

## SPATIAL AND PROJECTED DENSITIES IN THE MODEL

$r$	SPACE			PROJECTION			
	$\rho(r)$	$\int_0^r \rho dV$	$\int_0^r \rho^2 dV$	$\phi(r)$	$\int_0^r \phi dS$	$\eta(r)$	$\int_0^r \eta dS$
0.00...	1.00+0	0.00	0.00	1.99+0	0.00	1.16+0	0.00
0.48...	7.32-1	0.36	0.30	1.61+0	1.28	6.88-1	0.64
0.71...	5.36-1	1.01	0.70	1.31+0	2.54	4.07-1	1.09
0.92...	3.92-1	1.79	1.06	1.07+0	3.78	2.41-1	1.42
1.12...	2.87-1	2.67	1.36	8.69-1	5.01	1.43-1	1.66
1.32...	2.10-1	3.61	1.59	7.11-1	6.25	8.51-2	1.83
1.54...	1.53-1	4.60	1.77	5.82-1	7.50	5.07-2	1.96
1.77...	1.12-1	5.64	1.90	4.78-1	8.76	3.02-2	2.05
2.02...	8.18-2	6.72	2.01	3.92-1	10.05	1.80-2	2.12
2.30...	5.96-2	7.85	2.09	3.23-1	11.39	1.08-2	2.17
2.61...	4.34-2	9.03	2.15	2.65-1	12.77	6.44-3	2.21
2.95...	3.15-2	10.27	2.19	2.19-1	14.23	3.85-3	2.24
3.35...	2.29-2	11.58	2.23	1.80-1	15.77	2.30-3	2.27
3.80...	1.65-2	12.97	2.25	1.48-1	17.41	1.37-3	2.28
4.31...	1.19-2	14.47	2.27	1.22-1	19.18	8.10-4	2.29
4.92...	8.53-3	16.08	2.29	9.98-2	21.1	4.78-4	2.31
5.63...	6.08-3	17.85	2.30	8.14-2	23.2	2.79-4	2.33
6.47...	4.30-3	19.81	2.31	6.60-2	25.6	1.62-4	2.33
7.47...	3.01-3	22.0	2.32	5.34-2	28.2	9.20-5	2.34
8.68...	2.09-3	24.5	2.33	4.25-2	31.1	5.14-5	2.34
10.16...	1.43-3	27.3	2.33	3.35-2	34.4	2.79-5	2.35
12.00...	9.53-4	30.6	2.34	2.59-2	38.1	1.46-5	2.35
14.29...	6.22-4	34.4	2.34	1.95-2	42.4	7.33-6	2.35
17.22...	3.92-4	38.9	2.34	1.43-2	47.2	3.44-6	2.35
21.0...	2.36-4	44.1	2.34	1.01-2	52.6	1.48-6	2.35
26.1...	1.34-4	50.3	2.34	6.64-3	58.7	5.62-7	2.35
33.0...	6.84-5	57.5	2.35	4.00-3	65.4	1.77-7	2.35
43.1...	3.00-5	65.7	2.35	2.08-3	72.3	4.11-8	2.35
58.8...	9.84-6	74.4	2.35	8.07-4	78.8	5.38-9	2.35
87.2...	1.58-6	82.1	2.35	1.46-4	83.6	1.71-10	2.35
158.6...	0	85.0	2.35	0	85.0	0	2.35

NOTE.— $\phi$  and  $\eta$  are the projections of  $\rho$  and  $\rho^2$ , respectively. 7.32-1 means  $7.32 \times 10^{-1}$ .

表 1.5: モデルにおける空間的な密度と射影密度

## RELATIVE VALUES OF VELOCITY DISPERSION AND ESCAPE VELOCITY

$r$	$\sigma$	$v_e$	$r$	$\sigma$	$v_e$
0.00.....	1.00	1.00	7.47.....	0.82	0.65
0.92.....	0.99	0.95	12.00.....	0.74	0.57
1.54.....	0.98	0.90	21.0.....	0.63	0.48
2.30.....	0.96	0.84	43.1.....	0.46	0.37
3.35.....	0.92	0.78	158.6.....	0.00	0.20
4.92.....	0.88	0.72			

表 1.6: 速度分散と脱出速度の相対的な値

## 1.3 スニャエフ・ゼルドビッチ効果

### 1.3.1 スニャエフ・ゼルドビッチ効果の予言

1972年の論文で、ロシアの宇宙物理学者である Sunyaev と Zeldovich は、この放射に関連する宇宙物理学的现象の予言をした。その予言の内容は次のとおりである。宇宙のあらゆる方向からやってくる宇宙背景放射において、銀河団の方向からやってくる放射は、銀河団の無い方向からやってくる放射に対して強度が変化するだろうというものであった。彼らの名前に因んでこの効果は、スニャエフ・ゼルドビッチ効果と呼ばれている。この効果に関連した初期の研究については、Zeldovich と Sunyaev [1] による 1969 年の論文から始まり、Sunyaev と Zeldovich [2-6] の論文で発表されている。スニャエフ・ゼルドビッチ効果の原理は、銀河団内に存在する高温プラズマ電子から宇宙背景放射が逆コンプトン散乱を受け、宇宙背景放射の分布が高周波数側にシフトするというものである。すなわち、プランク分布に対して、低周波側であるマイクロ波領域では、宇宙背景放射のスペクトルは減少(温度が低下)し、高周波側であるサブミリ波領域ではスペクトルが増加(温度が上昇)するという性質を示すことになる(図 1.11 参照)。この効果は、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と呼ばれている。一般的には、銀河団は CMB 系に対して固有運動(宇宙膨張による後退速度を差し引いて残る、近傍の重力ポテンシャルによる固有速度が起源)をしていると考えられ、その場合、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に加え、固有運動に起因して起こる効果も生じる。この効果は、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と呼ばれる。この効果は、銀河団の固有速度の成分のうち、観測者の方向へ向く成分(視線方向成分)の大きさに依存して、宇宙背景放射の分布が変化するというものである。その速度成分が観測者側に近づく方向のときは宇宙背景放射のスペクトルが、周波数全域で増加(温度が上昇)し、遠ざかる方向のときはスペクトルが、周波数全域で減少(温度が低下)する。

### 1.3.2 スニャエフ・ゼルドビッチ効果の応用

これらの効果を利用すると、以下のように宇宙物理学において重要なことが分かる。高分解能・高感度の観測機器を駆使してこれら効果を観測すると、銀河団内部の温度構造や銀河団の進化の手掛かりが得られる。X 線観測とスニャエフ・ゼルドビッチ効果の電波観測とを組み合わせることによって、重要なパラメータが推定される。一つの銀河団から得られる観測量は、スニャエフ・ゼルドビッチ効果による電波強度変化量、X 線放射強度、銀河団プラズマ温度、銀河団の見かけの角半径である。これら四つの観測量から銀河団までの距離の決定(図 1.12 参照)が可能となる。距離( $d$ とおく)が決定すると、銀河団の赤方偏移の測定からもとめられる銀河団の後退速度( $v$ とおく)を用いて、ハッブル定数  $H_0 = v/d$  を計算できる。ここで、銀河団に対して球形であるという仮定をしているため、系統誤差が発生するが、数多くの銀河団についてハッブル定数を求めて平均的な値(統計平均)を求めれば、系統誤差を抑えることができる。電波干渉計を用いたスニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測と 線観測による 30GHz での観測の組み合わせによる解析で、赤方偏移  $z \sim 0.14$  から 0.78 までの範囲にある 18 個の銀河団までの距離の決定を行い、密度パラメータ  $\Omega_m$  と宇宙定数  $\Omega_\Lambda$  に値を与えてハッブル定数の値に制限を与える試みについて、Reese ら [36] や Carlstrom ら [37] などによって、論文で紹介されている。Reese ら [36] の論文では、スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測に用いられた電波干渉計は OVRO(Owens Valley Radio Observatory) と BIMA(Berkeley-Illinois-Maryland Association) であ

り、線観測に用いられた望遠鏡は ROSAT である。その論文によると、

$$H_0 = \begin{cases} 60_{-4}^{+4} {}_{-18}^{+13} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, & \Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7 \\ 56_{-4}^{+4} {}_{-17}^{+12} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, & \Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.0 \\ 54_{-3}^{+4} {}_{-16}^{+12} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, & \Omega_M = 1.0, \Omega_\Lambda = 0.0 \end{cases} \quad (1.22)$$

であるという結果が報告されている。ここで、不確定性の値については、統計的不確定性、系統的な不確定性の順に書かれている (68.3%信頼度)。系統的な不確定性には、スニャエフ・ゼルドビッチ効果のデータの絶対較正から生じる  $\pm 8\%$  の不確定性 (中心の熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果による宇宙背景放射の温度の増減  $\Delta T_0$  における  $\pm 4\%$  の不確定性)、PSPC (Position Sensitive Proportional Counter) と HRI (High Resolution Imager) に関わる  $\pm 10\%$  の有効領域の不確定性、柱密度から生じる  $\pm 5\%$  の不確定性、銀河団の形状における球面からのずれによる  $\pm 5\%$  ( $\simeq 20/\sqrt{18}$ ) の不確定性、銀河団内全体は等温であるという仮定による  $\pm 10\%$  の不確定性、銀河団ガス内における小規模の凝集による  $-20\%$  の不確定性、検出されていない電波点源による  $\pm 12\%$  の不確定性、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果による  $\pm 2\%$  ( $\simeq 8/\sqrt{18}$ ) の不確定性、宇宙背景放射の初期揺らぎによる  $\pm 1\%$  の不確定性、電波ハローによる  $-3\%$  の不確定性、不正確に測定される一次ビームによる  $\pm 3\%$  の不確定性などが含まれている。これらの不確定性の内、銀河団の形状における球面からのずれによる寄与、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果による寄与、そして、宇宙背景放射の初期揺らぎによる寄与については、多数の銀河団サンプルを用いれば平均的な量に抑えることができると考えられる。

また、特に運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の検出ができれば、銀河団の固有速度の視線方向成分を特定することができ、それにより、近傍の重力ポテンシャルの様子を知ることが得られる。そして、それを多くの銀河団について行うことができれば、宇宙に分布する銀河団の固有速度マップが得られ、宇宙の構造形成についての解明をするうえで、重要な手がかりになると考えられる。運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を用いた銀河団の固有速度の決定について述べている論文としては、1991 年の Rephaeli と Lahav [38] による論文と 1996 年の Haehnelt と Tegmark [39] による論文がある。

まず、Rephaeli と Lahav [38] による論文で述べられている内容を紹介する。運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果は、

- 不正確な経験的距離指標を測定する必要が無い。
- 距離に依存しない。
- 物理的に説明できる。

という点で、固有速度決定に対して優れた方法である。そして、ガスが豊富な銀河団であれば、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の測定によって、原則的に固有速度は決定可能である。しかし、メンバー数の多い銀河団に含まれる銀河の典型的な速度は  $2000 \text{ km s}^{-1}$  に匹敵するため、その銀河団内にある規模の大きい且つガスが豊富な銀河は、 $O(10^{-5})K$  の温度変化をもたらす可能性がある。そのような銀河は、銀河団全体の全強度に対してかなりの影響力を持つと考えられる。従って、全体的に考えると、熱的及び運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の測定に対して、ノイズの混入の源となると考えられる。このような問題は考慮に入れておく必要があると、彼らは指摘している。

次に、Haehnelt と Tegmark [39] による論文で述べられている内容を紹介する。地上にある測定機器は大気ノイズに邪魔されてしまうということを考えると、大気圏外で運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測するというのが優れた手法であると考えられる。また、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果がゼロにな

る 218 GHz での観測が最適である。その状況下においては、宇宙背景放射の初期揺らぎとの混入が、大部分を占めるノイズの発生源と考えられる。そのノイズは、測定したい信号と同程度あるいはそれ以上であるから、宇宙背景放射のノイズ特性や個々の銀河団のガス分布（線観測によって得られる）に対する理解が必要となる。その知識を基にして、個々の銀河団に最も適した空間フィルターを用いた CMB マップ解析が可能となる。信号体雑音比に 2 倍の向上をもたらすという事は容易に達成可能であり、高精度の線マップからガス質量分布が詳しく分かれば、10 倍の向上をもたらす事すら可能である。最終的に実現された信号対雑音比は、宇宙論モデルと測定機器の角度分解能であり、現時点では、個々の銀河団の固有速度の有意な測定が可能であるか否かは明らかではない。好ましい標準的宇宙論シナリオと優れた角度分解能であれば、30 個ほどの個々の銀河団の固有速度は、正確に決定されると考えられる。現実的ではないにしても、赤方偏移  $\approx 10000 \text{ km s}^{-1}$  での高い線輝度を持つ 200 個の銀河団の集団によるバルク速度は、 $200 \text{ km s}^{-1}$  オーダーの精度で決定が可能ならずであると、彼らは述べている。

さて、最後に強調すべきことは、熱的及び運動学的スニャエフゼルドビッチ効果の大きさは赤方偏移パラメータに依存しない（距離に依存しない）ため、遠方銀河団の観測に有用であるという利点を持っているということである。

### 1.3.3 スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測

スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測は、理論的には魅力的な研究対象となるのだが、観測技術の難しさから、観測的な成果は得られ難いものであった。それは、角度分解能や感度が可視光・X 線データに比べて劣っていた為である。それは、電波干渉計が元々高い空間分解能を達成することを主眼において設計されている為、スニャエフ・ゼルドビッチ効果のような弱く拡がった信号の検出は不得意であったからである。しかし、シカゴ大学の Carlstrom らのグループは、分解能を落とす事により、視野を広げるという発想によって、この問題を解決した。これが 90 年代の半ばの事である。これ以降、銀河団の SZ マップが次第に作られている。銀河団の SZ マップの例として、Carlstrom ら [37] による 2002 年の論文に掲載されているものを図 1.13 として紹介する。赤方偏移の範囲は  $0.17 \leq z \leq 0.89$  である。この図は、低周波数側である 30 GHz で観測した結果であるため、中心に向かう程、負の信号が強くなっている。現在、このような観測を行っている観測機の一つが The Sunyaev-Zel'dovich Array (SZA)(図 1.14) である。現在は、このようにノイズが少ない低周波数側での観測が多く行われている。熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果による宇宙背景放射の温度変化  $\Delta T_0$  の観測結果が、2006 年の LaRoque ら [40] による論文にある Table 6 中に紹介されており、表 1.7 として紹介しておく。次に、Spergel ら [29] の 2003 年の論文に、スニャエフ・ゼルドビッチ効果を含む異なった方法によるハッブル定数の決定値の比較をしている表を公表している。その論文では、*HST* Key Project、スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測と線観測の組み合わせ、WMAP PL(power-low) CDM model、という三つの方法によるハッブル定数の比較が行われている。それぞれによるハッブル定数の結果は、

- 2001 年の Freedman ら [41] の論文を参照すると、*HST* Key Project によるハッブル定数  $H_0 = 72 \pm 3 \pm 7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
- 2002 年の Reese ら [36] の論文を参照すると、スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測と線観測の組み合わせによるハッブル定数  $H_0 = 72 \pm 4^{+13}_{-18} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
- 2001 年の Spergel ら [29] の論文を参照すると、WMAP PL(power-low) CDM model によるハッブル



$$\text{定数 } H_0 = 72 \pm 5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

である。誤差は、最初に統計誤差、その次に系統誤差を表示している。スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測と線観測の組み合わせによるハッブル定数は、その他の方法と少しずれていることが分かる。Spergelら [29] は、このずれについて、銀河団の密度と温度のプロファイルに関して球形仮定をしているスニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測と線観測の組み合わせの方法は、近傍というよりはむしろ中間赤方偏移  $z \sim 0.5$  でのハッブル定数に影響を与えやすいと述べている。

また、複数の周波数での観測を組み合わせる事で、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の成分を分離する同時多波長観測 (図 1.15) [20] も行われている。その際には、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果がゼロとなり、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果が極値をとる、クロスオーバー周波数を含めることが必須となる。この図に記されている観測誤差から分かるとおり、固有速度の誤差が数 100% もあるというのが現状が見受けられる。しかし、近い将来に完成予定の高精度観測機器による固有速度の精度の良い結果が期待されている。完成が間近である South Pole Telescope (SPT) (図 1.16 参照) は、90, 150, 220, 270 GHz の周波数で観測される。

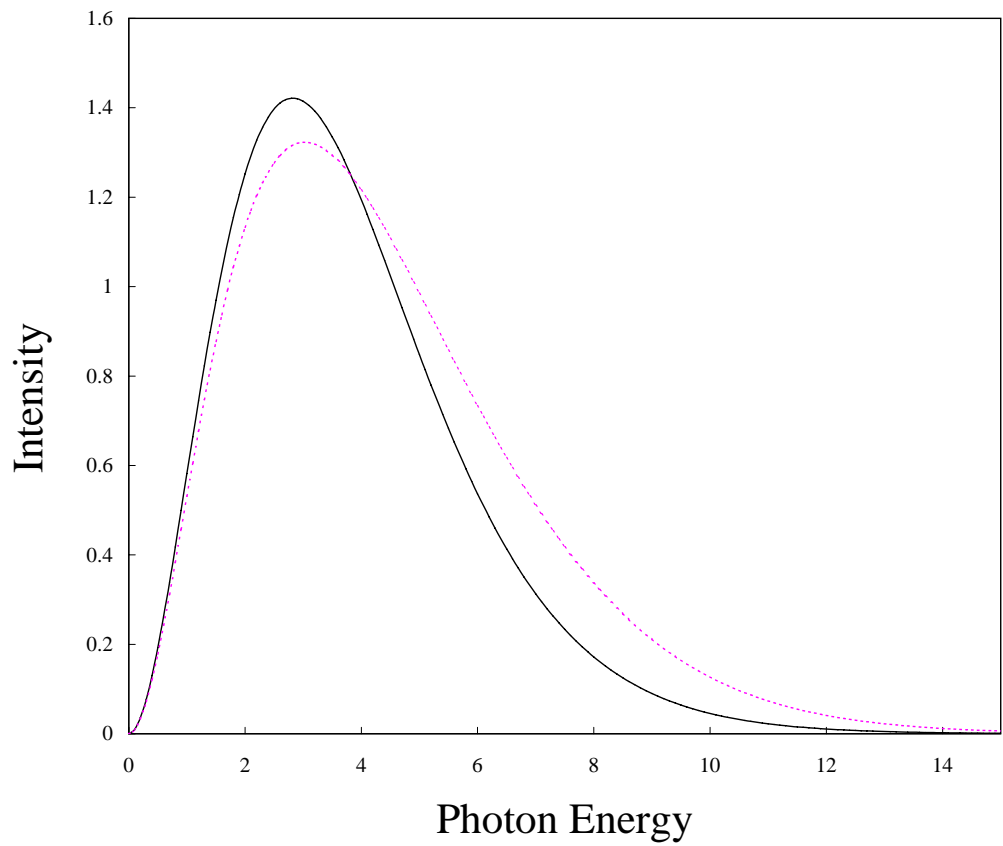


図 1.11: コンプトン散乱によるプランク分布からのずれ。実線が光子の初期分布 (プランク分布)、点線が散乱後の光子の分布を表す。低周波数側、すなわち、エネルギーの低いところで強度が減少、高い所で増加していることが分かる。これは、光子が、温度約 15 keV の電子に散乱された後のゆがみを、100 倍した図になっている。横軸は、光子のエネルギー無次元量 ( $h\nu/k_B T_0$ 、 $T_0$ : 宇宙背景放射の温度) としている。

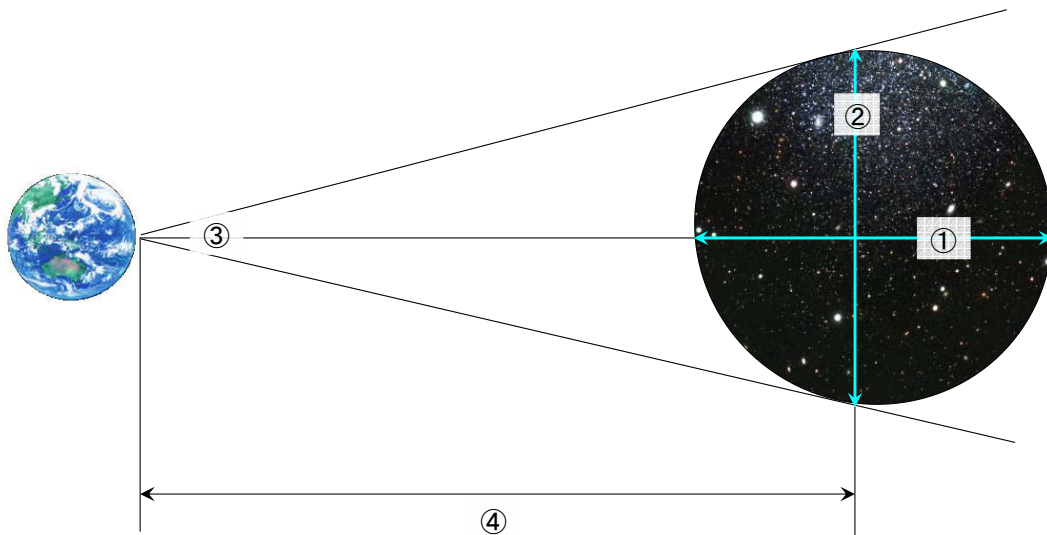


図 1.12: 銀河団までの距離を求める方法を示した図。まず、スニャエフゼルドビッチ効果の観測により銀河団の奥行き (1) が特定できる。銀河団を球対称と仮定すると、その奥行き (1) は銀河団の幅 (2) ( $r$  とおく) である。観測により、銀河団の見かけの角半径 (3) ( $\theta$  とおく) を知ることができる。 $r$  と  $\theta$  を使って、銀河団までの距離 (4) ( $d$  とおく) を  $d = r/\theta$  という計算から求めることができる。

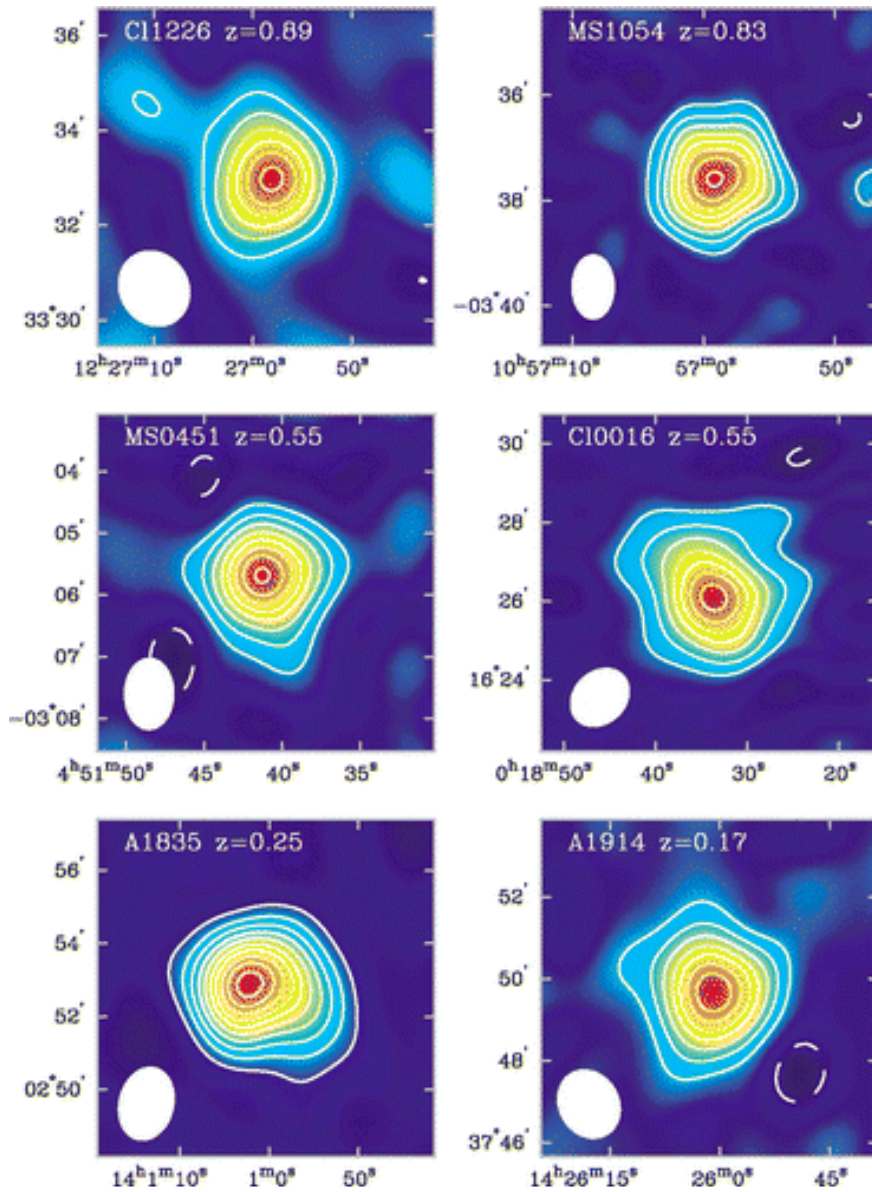


図 1.13: OVRO(Owens Valley Radio Observatory) と BIMA(Berkeley-Illinois-Maryland Association) により観測した 30 GHz における SZ 強度分布図。

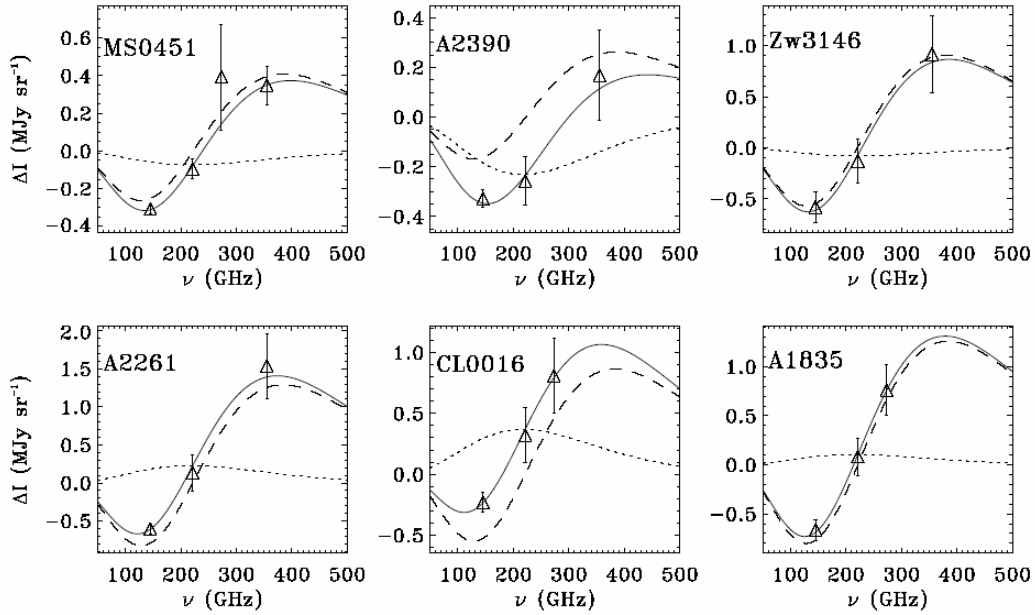


图 1.14: The Sunyaev-Zel'dovich Array (SZA)

MODEL PARAMETERS, CLUSTER MASSES, AND GAS MASS FRACTIONS: ISOTHERMAL  $\beta$ -MODEL CONSTRAINTS  
 DERIVED FROM SZE IMAGING DATA

Cluster	$\theta_c$ (arcsec)	$\Delta T_0$ (mK)	$M_{\text{gas}}(r_{2500})$ ( $10^{13} M_{\odot}$ )	$M_{\text{total}}(r_{2500})$ ( $10^{14} M_{\odot}$ )	$f_{\text{gas}}(r_{2500})$
CL 0016.....	$52.0^{+9.0}_{-8.1}$	$-1.449^{+0.088}_{-0.094}$	$4.65^{+0.42}_{-0.39}$	$2.83 \pm 0.32$	$0.165^{+0.033}_{-0.027}$
A267.....	$38.6^{+15.8}_{-12.8}$	$-0.735^{+0.084}_{-0.099}$	$2.74^{+0.68}_{-0.57}$	$1.99^{+0.25}_{-0.23}$	$0.137^{+0.054}_{-0.038}$
A370.....	$21.5^{+9.3}_{-7.4}$	$-1.072^{+0.144}_{-0.244}$	$2.58^{+0.47}_{-0.40}$	$3.18 \pm 0.22$	$0.081^{+0.021}_{-0.016}$
MS 0451.....	$31.4^{+7.1}_{-6.4}$	$-1.610^{+0.100}_{-0.112}$	$5.03^{+0.83}_{-0.71}$	$3.46^{+0.32}_{-0.31}$	$0.145^{+0.039}_{-0.030}$
MC 0647.....	$19.1^{+8.1}_{-6.6}$	$-1.390^{+0.151}_{-0.242}$	$2.81^{+0.72}_{-0.57}$	$6.21^{+0.86}_{-0.74}$	$0.045^{+0.018}_{-0.012}$
A665.....	$56.8^{+23.5}_{-17.5}$	$-0.801^{+0.083}_{-0.105}$	$2.43^{+0.71}_{-0.53}$	$2.77^{+0.21}_{-0.29}$	$0.087^{+0.038}_{-0.023}$
A773.....	$30.9^{+11.7}_{-9.8}$	$-0.985^{+0.109}_{-0.128}$	$2.56^{+0.67}_{-0.54}$	$3.12^{+0.23}_{-0.22}$	$0.082^{+0.027}_{-0.020}$
Zw 3146.....	$29.4^{+11.9}_{-9.7}$	$-1.223^{+0.177}_{-0.242}$	$3.95^{+0.82}_{-0.73}$	$3.43^{+0.17}_{-0.19}$	$0.115^{+0.030}_{-0.024}$
MS 1054.....	$54.5^{+11.4}_{-10.4}$	$-1.483^{+0.191}_{-0.253}$	$1.17^{+0.16}_{-0.15}$	$0.62^{+0.21}_{-0.16}$	$0.187^{+0.081}_{-0.054}$
MS 1137.....	$12.2^{+8.4}_{-4.4}$	$-1.021^{+0.301}_{-0.441}$	$2.09^{+0.38}_{-0.36}$	$0.96^{+0.15}_{-0.14}$	$0.221^{+0.064}_{-0.051}$
MC 1149.....	$53.2^{+19.1}_{-16.6}$	$-1.181^{+0.127}_{-0.160}$	$3.00^{+0.42}_{-0.37}$	$2.17^{+0.55}_{-0.53}$	$0.139^{+0.059}_{-0.038}$
CL 1226.....	$11.1^{+8.2}_{-4.5}$	$-2.171^{+0.677}_{-1.164}$	$2.82^{+0.63}_{-0.51}$	$5.08^{+1.05}_{-0.88}$	$0.056^{+0.026}_{-0.017}$
A1689.....	$25.2^{+6.9}_{-5.9}$	$-1.749^{+0.171}_{-0.213}$	$3.57^{+0.69}_{-0.57}$	$5.21 \pm 0.23$	$0.069^{+0.015}_{-0.012}$
R1347.....	$28.7^{+10.5}_{-8.1}$	$-2.235^{+0.316}_{-0.429}$	$5.88^{+0.92}_{-0.85}$	$8.35 \pm 0.56$	$0.070^{+0.015}_{-0.013}$
A1835.....	$50.1^{+9.2}_{-8.2}$	$-1.590^{+0.112}_{-0.113}$	$6.20^{+0.93}_{-0.82}$	$5.38^{+0.34}_{-0.31}$	$0.115^{+0.024}_{-0.020}$
A1914.....	$29.4^{+11.3}_{-8.9}$	$-1.776^{+0.200}_{-0.317}$	$4.33^{+0.96}_{-0.75}$	$4.69^{+0.18}_{-0.16}$	$0.092^{+0.023}_{-0.017}$
A1995.....	$34.6^{+5.5}_{-5.4}$	$-1.051^{+0.062}_{-0.063}$	$4.49^{+0.63}_{-0.57}$	$3.63^{+0.22}_{-0.21}$	$0.124^{+0.024}_{-0.020}$
A2163.....	$102.7^{+17.0}_{-15.1}$	$-1.898^{+0.276}_{-0.336}$	$7.57^{+1.61}_{-1.38}$	$6.17^{+0.38}_{-0.44}$	$0.123^{+0.036}_{-0.028}$
A2204.....	$100.2^{+20.6}_{-18.5}$	$-1.938^{+0.296}_{-0.382}$	$8.96^{+2.57}_{-2.13}$	$4.95^{+0.46}_{-0.41}$	$0.180^{+0.069}_{-0.051}$
A2218.....	$79.0^{+13.6}_{-12.4}$	$-1.059^{+0.143}_{-0.176}$	$5.34^{+1.23}_{-1.03}$	$2.95^{+0.21}_{-0.20}$	$0.181^{+0.055}_{-0.042}$
A2261.....	$20.9^{+9.8}_{-7.5}$	$-1.179^{+0.148}_{-0.239}$	$2.46^{+0.73}_{-0.54}$	$2.91^{+0.27}_{-0.23}$	$0.084^{+0.031}_{-0.021}$
MC 2214.....	$27.3^{+8.3}_{-7.1}$	$-1.518^{+0.160}_{-0.227}$	$4.37^{+0.60}_{-0.55}$	$3.87^{+0.41}_{-0.38}$	$0.113^{+0.028}_{-0.022}$
MC 2228.....	$47.3^{+18.7}_{-15.5}$	$-1.315^{+0.137}_{-0.164}$	$3.91^{+0.65}_{-0.56}$	$2.15^{+0.40}_{-0.43}$	$0.182^{+0.076}_{-0.049}$

表 1.7: 個々の銀河団サンプルの観測データ



MS0451

$$v = +800^{+1525}_{-1125} \text{ km s}^{-1}$$

A2390

$$v = +1900^{+6225}_{-2650} \text{ km s}^{-1}$$

Zw3146

$$v = -400^{+3700}_{-1925} \text{ km s}^{-1}$$

A2261

$$v = -1575^{+1500}_{-975} \text{ km s}^{-1}$$

CL0016

$$v = -4100^{+2650}_{-1625} \text{ km s}^{-1}$$

A1835

$$v = -175^{+1675}_{-1275} \text{ km s}^{-1}$$

図 1.15: 複数の周波数での観測を組み合わせ、銀河団の固有速度を決定を行った観測例。



图 1.16: SOUTH POLE TELESCOPE at Amundsen-Scott South Pole Station



## 第2章 熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

### 2.1 はじめに

この章では、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の理論計算について説明する。スニャエフ・ゼルドビッチ効果は、1972年、Sunyaev と Zeldovich [3] によって予言された。そして、彼らによって、電子の運動が非相対論的であるという近似で導出された。それは、Kompaneets 方程式を用いる方法である。その後の観測では、1998年に Tucker ら [7] は電子温度  $k_B T_e = 17.4 \pm 2.5 \text{ keV}$  の銀河団を発見した。これを受けて Rephaeli らは、スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算に電子の運動の相対論的效果を考慮することが重要であると考え、輻射輸送理論の方法を用いて、相対論的補正を考慮して、スニャエフ・ゼルドビッチ効果を計算する先駆的な研究を行った。これに対して、1998年に伊藤、神山、野澤 [8] は、銀河団に静止した座標系を取り、相対論的補正を考慮して、スニャエフ・ゼルドビッチ効果を計算した。具体的には、銀河団電子と宇宙背景放射の多重散乱を無視した上で、ボルツマン方程式を相対論的に厳密に数値積分する方法と、フォッカー・プランク展開を高次まで行う方法の二つにより、計算された。後者の計算の低次までの計算が、Sunyaev と Zeldovich が用いたカンパニエーツ方程式に対応している。実は、同年に Anthony Challinor と Anthony Lasenby [42] が、伊藤、神山、野澤 [8] よりも先に、相対論的補正を考慮したスニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算を発表しているが、伊藤、神山、野澤 [8] の結果は、Anthony Challinor と Anthony Lasenby [42] の展開次数よりも高次まで計算されている。その上、伊藤、神山、野澤 [8] は、他の研究グループによって行われたことがない厳密な数値積分の計算を行い、その結果を用いて、展開式の精度について調べるといっている。

2001年には伊藤、川名、野澤、神山 [43] による2回散乱を考慮した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果が計算された。その計算は、[8]の展開次数を上げた展開式を用いて計算されたものである。そして、さらに数値積分を行い、展開計算の結果との比較も行っている。

また、近い将来、高精度のスニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測が可能になり、今まで困難であった運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のより詳細な観測も行われる予定である。実際に観測される量は、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を足し合わせたものであるから、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の検出結果の解析をするためには、精度の高い熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の解析が必要になると考えられる。そこで、1998年に伊藤、神山、野澤 [8] が行った熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を紹介するとともに、その展開次数より高次までの計算を報告する。また、その計算結果を用いて2回散乱を考慮した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開計算を行った。

これらの計算結果の精度や性質などを厳密な数値積分との比較を用いて評価する。この章の流れは、2.2: 非相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算、2.3: 相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の1回散乱成分、2.4: 2.3の展開計算を高次まで拡張した計算、そして、2.5: 1回散乱成分の結果を用いた2回散乱成分の計算という順序で記述していく。

一方、2.3 (2.3)、2.5の詳細な計算については、付録A、Bを参照して頂きたい。

## 2.2 非相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

### 2.2.1 カンパニエーツ近似を用いた熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算

ここでは、非相対論的な熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果をカンパニエーツ近似を用いて導出する。光子の分布関数  $n(\omega)$  に対する時間発展の方程式は、銀河団中のプラズマが希薄な為、光子が受ける散乱が1回のみと考え、また、銀河団中のプラズマは、等温且つ均一に分布していると仮定すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = & - \int d\tau \int \{n(\omega) [1 + n(\omega')] f(E) \\ & - n(\omega') [1 + n(\omega)] f(E + \hbar\omega - \hbar\omega')\} dW \end{aligned} \quad (2.1)$$

と書き下す事ができる。ここで、 $d\tau$  は電子の位相空間要素、 $f(E)$  は電子の分布関数、 $dW$  はある一つの状態から別の状態への微分遷移確率 (Differential Probability of Transition;  $c d\sigma$ 、 $c$ :光速、 $d\sigma = (d\sigma/d\Omega)d\Omega$ 、 $(d\sigma/d\Omega)$ :微分散乱断面積)、プライムが付いているものは全て散乱後の終状態を表す。この方程式は、角周波数  $\omega$  で入射した光子が  $\omega'$  となって散乱される確率から、 $\omega'$  で入射した光子が  $\omega$  となって散乱される確率を引いたものとなっている。

ここで、電子の分布関数  $f(E)$  はボルツマン分布 ( $f(E) = Ae^{-E/k_B T_e}$ 、 $T_e$  は電子温度) とする。また、 $\omega' - \omega = \Delta\omega$  とおき、(2.1) 式に代入して、計算していく。まず、

$$\begin{aligned} E' & \equiv E + \hbar\omega - \hbar\omega' \\ & = E - \hbar\Delta\omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

とする。また、光子のエネルギーを電子のエネルギーで割ったものを

$$x \equiv \frac{\hbar\omega}{k_B T_e} \quad (2.3)$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} f(E') & = f(E - \hbar\Delta\omega) \\ & \approx f(E) \left( 1 + \Delta x + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} n(\hbar\omega') & = n(\hbar\omega + \hbar\Delta\omega) \\ & \approx n(\hbar\omega) + \frac{\partial n}{\partial (\hbar\omega)} \hbar\Delta\omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial (\hbar\omega)^2} (\hbar\Delta\omega)^2 + \dots \\ & = n(\hbar\omega) + \frac{\partial n}{\partial (\hbar\omega)} \frac{k_B T_e}{k_B T_e} \hbar\Delta\omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial (\hbar\omega)^2} \frac{(k_B T_e)^2}{(k_B T_e)^2} (\hbar\Delta\omega)^2 + \dots \\ & = n + \frac{\partial n}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

となり、(2.4) 式と (2.5) 式を (2.1) 式に代入すると、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \left[ \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] \frac{\hbar}{k_B T_e} \int d\tau \int dW f(E) \Delta\omega$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 2(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] \\
& \times \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k_B T_e} \right)^2 \hbar^2 \int d\tau \int dW f(E) \Delta\omega^2 + \dots
\end{aligned} \tag{2.6}$$

となる。ここで、上式の右辺第2項の積分は簡単に解くことが出来るので、まずそちらから考えていく。いま

$$I \equiv \hbar^2 \int d\tau \int dW f(E) \Delta\omega^2 \tag{2.7}$$

とおく。まず、運動量保存則とエネルギー保存則を考えると、

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar\omega}{c} \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{p} &= \frac{\hbar\omega'}{c} \hat{\mathbf{k}}' + \mathbf{p}' \\
\hbar\omega + \frac{p^2}{2m} &= \hbar\omega' + \frac{p'^2}{2m}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

ここで、 $\mathbf{p}$ 、 $\mathbf{p}'$  はそれぞれ散乱前後の電子の運動量、 $\hat{\mathbf{k}}$ 、 $\hat{\mathbf{k}}'$  はそれぞれ散乱前後の光子の伝播方向を表す。から、 $\mathbf{p}'$  を消去する。ここで  $\omega' = \omega + \Delta\omega$  を導入し、また 式には  $\Delta\omega$  の二乗の項が入っているので、 $\Delta\omega$  が十分小さいとして、ここでは一次の項のみを考える。すると、(2.8) 式の第1式より、

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}' &= \frac{\hbar\omega}{c} \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{p} - \frac{\hbar\omega'}{c} \hat{\mathbf{k}}' \\
&= \mathbf{p} - \frac{\hbar\omega}{c} (\hat{\mathbf{k}}' - \hat{\mathbf{k}}) - \frac{\hbar}{c} \Delta\omega \hat{\mathbf{k}}'
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
p'^2 &= p^2 \\
&= p^2 - \left( \frac{\hbar\omega}{c} \right)^2 (\hat{\mathbf{k}}' - \hat{\mathbf{k}})^2 - \frac{2\hbar\omega}{c} \mathbf{p} \cdot (\hat{\mathbf{k}}' - \hat{\mathbf{k}}) \\
&\quad - \left[ \frac{2}{c} \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}' - \frac{2\hbar\omega}{c^2} (1 - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) \right] \hbar\Delta\omega + O(\Delta\omega^2)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

が得られる。この結果を (2.8) 式の第2式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\hbar\Delta\omega &= -\frac{1}{2m} (p'^2 - p^2) \\
&= \frac{(\hbar\omega)^2}{2mc^2} (\hat{\mathbf{k}}' - \hat{\mathbf{k}})^2 + \frac{\hbar\omega}{mc} \mathbf{p} \cdot (\hat{\mathbf{k}}' - \hat{\mathbf{k}}) \\
&\quad + \left[ \frac{1}{mc} \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}' - \frac{\hbar\omega}{mc^2} (1 - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) \right] \hbar\Delta\omega
\end{aligned} \tag{2.11}$$

が得られる。この式を  $\hbar\Delta\omega$  について解くと、

$$\begin{aligned}
\hbar\Delta\omega &= -\frac{\frac{(\hbar\omega)^2}{2mc^2} (\hat{\mathbf{k}}' - \hat{\mathbf{k}})^2 + \frac{\hbar\omega}{mc} \mathbf{p} \cdot (\hat{\mathbf{k}}' - \hat{\mathbf{k}})}{1 - \frac{1}{mc} \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}' + \frac{\hbar\omega}{mc^2} (1 - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k})} \\
&= -\frac{(\hbar\omega)^2 (1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') + \hbar\omega c \mathbf{p} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')}{mc^2 \left[ 1 - \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}}' / mc + (\hbar\omega / mc^2) (1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \right]}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

となる。ここで、 $k_B T_e$ 、 $\hbar\omega$  共に、電子の静止エネルギー  $mc^2$  よりも十分に小さいとすると

$$\begin{aligned}\hbar\Delta\omega &\approx -\frac{(\hbar\omega)^2(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}}')+\hbar\omega c\mathbf{p}\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}')}{mc^2} \\ &\approx -\frac{\hbar\omega\mathbf{p}\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}')}{mc}\end{aligned}\quad (2.13)$$

となる。これを (2.7) 式に代入すると、

$$I = \left(\frac{\hbar\omega}{mc}\right)^2 \int d\tau \int dW [\mathbf{p}\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}')]^2 f(E) \quad (2.14)$$

となる。これを  $p$  の全ての方向に対して平均すると、

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar\omega}{mc}\right)^2 \int p^2 f(E) d\tau \int |\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}'|^2 dW \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar\omega}{mc}\right)^2 \int 4\pi p^2 dp f(E) p^2 \int |\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}'|^2 dW\end{aligned}\quad (2.15)$$

となる。はじめの積分は、ちょうど  $\langle p^2 \rangle$  に電子の数密度  $f_e$  をかけた形、また、電子の運動エネルギーの  $2m$  倍である。 $f(E)$  はボルツマン分布であるので、 $3mk_B T_e N_e$  となる。次に 式の後ろの積分を考える。今、コンプトン散乱断面積をトムソン散乱断面積によって近似する。トムソン散乱断面積は前方散乱と後方散乱に対して対称であるので、全散乱方向  $\theta$  から  $(\pi-\theta)$  までで積分すると、

$$\int \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}}' dW = 0 \quad (2.16)$$

となり、また、トムソン散乱断面積はエネルギーによらないので、結果として、

$$I = 2(\hbar\omega)^2 \left(\frac{k_B T_e}{mc^2}\right) \frac{c}{l} \quad (2.17)$$

となる。ここで、 $dW = cd\sigma$  を使った。また、 $l$  は平均自由行程を表し、 $l = 1/\sigma_T N_e$  で前断面積  $\sigma_T = (8\pi/3)(e^2/mc^2)^2$  と電子の数密度  $N_e$  より決定できる。

さて、次に光子の数は散乱前後で変化しないことを考え、粒子数の保存の式は、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -x^{-2} \frac{\partial(x^2 j)}{\partial x} \quad (2.18)$$

を考える。ここで、 $x$  は  $\hbar\omega/k_B T_e$  を表し、 $j$  は波数空間における、“流れ (flow)” を表す。さて、(2.6) 式と (2.18) 式は同じものを表しているの、これらを比較する。(2.1) 式は、 $x$  を係数に含まない二階導関数  $d^2 n/dx^2$  を持ち、 $n = (e^x - 1)^{-1}$  の時、 $\partial n/\partial x = -n(1+n)$  となり、第一項が 0 にならなくてははいけない。すなわち、 $j$  は少なくとも、

$$j = g(x) \left[ \frac{\partial n}{\partial t} + n(1+n) \right] \quad (2.19)$$

という形をしていなくてはならないことが分かる。次に、 $g(x)$  を決定する必要がある。(2.19) 式を (2.6) 式を代入して、 $d^2 n/dx^2$  の係数を比較する。(2.17) 式より、 $I$  は二階導関数の係数として  $x^2$  を持つ事が分かるので、 $g(x) = -x^2$  となる。以上より、粒子数保存の式は

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k_B T_e}{mc^2} \frac{c}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( \frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right] \quad (2.20)$$

となる。

さて、ここで宇宙背景放射について考えているので、 $n$  にプランク分布

$$n_o = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T_0} - 1} = \frac{1}{e^X - 1} \quad (2.21)$$

を代入する。ここで、 $X \equiv \hbar\omega/k_B T_0$ 、 $T_0$  は宇宙背景放射の温度 (2.726 K) を表す。さて、この  $X$  を用いて  $x$  を書き直すと、

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T_e} = \frac{T_0}{T_e} X \quad (2.22)$$

となる。これを用いて、(2.18) 式を書き直す。係数は省略して、

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( \frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right] = \frac{4T_0}{T_e} X \left( \frac{T_e}{T_0} \frac{\partial n}{\partial X} + n + n^2 \right) + \frac{T_0}{T_e} X^2 \left( \frac{T_e}{T_0} \frac{\partial^2 n}{\partial X^2} + \frac{\partial n}{\partial X} + 2n \frac{\partial n}{\partial X} \right) \quad (2.23)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial X} &= -e^X n^2 \\ \frac{\partial^2 n}{\partial X^2} &= e^X (e^X + 1) n^3 \end{aligned} \quad (2.24)$$

より、(2.23) 式は、

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( \frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right] = \frac{4T_0}{T_e} \frac{X e^X}{(e^X - 1)^2} \left[ 1 - \frac{T_e}{T_0} \right] + \frac{T_0}{T_e} \frac{X^2 e^X}{(e^X - 1)^2} \left[ \frac{T_e}{T_0} \frac{e^X + 1}{e^X - 1} - \frac{e^X + 1}{e^X - 1} \right] \quad (2.25)$$

となる。今は銀河団中の電子を考えているので、 $T_0 \ll T_e$  とすると、

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( \frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right] \approx \frac{X e^X}{(e^X - 1)^2} \left[ \frac{e^X + 1}{e^X - 1} X - 4 \right] \quad (2.26)$$

となる。よって、(2.20) 式は、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k_B T_e c}{m c^2 l} \frac{X e^X}{(e^X - 1)^2} \left[ \frac{e^X + 1}{e^X - 1} X - 4 \right] \quad (2.27)$$

となる。さて、実際に観測されるのは、銀河団を通過した後の宇宙背景放射の歪みであるので、光子の通過してくる時間で積分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{n_0} &= \int \frac{1}{n_0} \left( \frac{\partial n}{\partial t} \right) dt \\ &= \frac{k_B T_e}{m c^2} \frac{X e^X}{(e^X - 1)^2} \left[ \frac{e^X + 1}{e^X - 1} X - 4 \right] \int \sigma_T N_e(l) dl \\ &= \theta_e \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \left[ \frac{e^X + 1}{e^X - 1} X - 4 \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

となる。ここで、 $n_0$  はプランク分布を表し、また、 $\tau = \int \sigma_T N_e(l) dl$ 、 $\theta_e = k_B T_e / m c^2$  とした。 $\tau$  は光学的深さを表す。これが、非相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を表す式である。また、一般的な銀河団のパラメータである、電子数密度  $N_e \sim 10^{-3} \text{cm}^{-3}$ 、銀河団の直径  $L \sim 1 \text{Mpc}$  を、銀河団が球対称・等密度であ

ると仮定して代入すると、 $\tau$  は、 $O(10^{-2})$  であることが分かる。また実際に観測される強度変化として、プランクの黒体放射の式より、

$$\Delta I = \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n}{n_0} \quad (2.29)$$

と定義する。

これを、観測によって決まる量である光学的深さ  $\tau$  で割って  $\Delta I/\tau$  を熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を表わす量と定義する。

## 2.2.2 熱的スニャエフゼルドビッチ効果の特性

熱的スニャエフゼルドビッチ効果のグラフを図 2.1 に示す。グラフを見れば分かるように、低エネルギー側では強度が減少し、高エネルギー側では強度が増加する。これが熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の性質である。

さて、1.3 章で、スニャエフ・ゼルドビッチ効果は距離を求める理論であると説明した。(2.28) 式において、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のパラメータは、 $T_e$ 、 $X$ 、 $N_e$  であり、 $X$  は、波長領域を観測者が決定する事により任意に決まる。 $T_e$ 、 $N_e$  については、 $X$  線観測と組み合わせる事により決定でき、実際の未知数である  $\tau$  の中にある、銀河団の奥行きが求まるのである。銀河団を球対称と仮定すると、銀河団の奥行き of 長さは、銀河団の幅であるということになる。その幅の値と見かけの視差角度を用いて、第 1 章で述べたように、銀河団までの距離を求める事ができるのである。

相対的な分布変化  $\Delta n/n_0$  のレイリー・ジーンズ極限 ( $X \rightarrow 0$ ) をとることで、相対的な温度変化を求めると、

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{n_0} = -\frac{2k_B T_e}{mc^2} \tau \quad (2.30)$$

である。値を代入して、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の寄与  $\Delta T$  はどれくらいかを評価してみる。銀河団の一般的な値  $T_e \sim 10^8$  K (10 keV) とし、 $\tau \sim 0.01$  を代入する。温度  $T_0$  は宇宙背景放射の温度であり、 $T_0 \simeq 2.726$  K を代入して計算すると、 $\Delta T \sim -10^{-3}$  K となる。よって、 $T_0 \simeq 2.726$  K に対して、 $\sim$ mK のオーダーで歪む事がわかる。実際の観測でも、この程度のオーダーの歪みが観測されている。

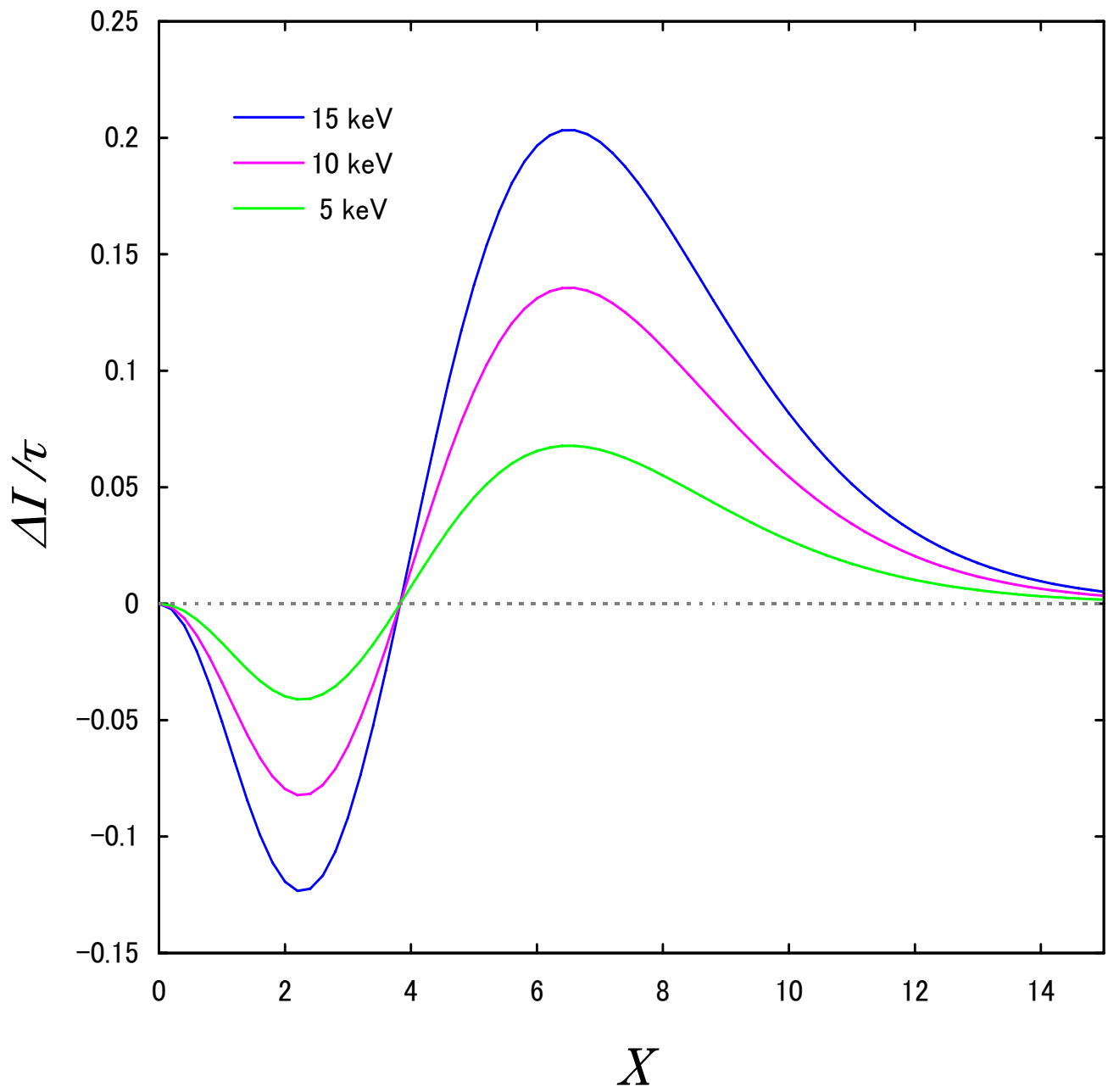


図 2.1: 5keV、10keV、15keV の場合の熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の曲線

## 2.3 相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

### 2.3.1 ボルツマン方程式の展開

銀河団中の電子は非常に希薄 ( $\sim 10^{-3} \text{cm}^{-3}$ ) であり、光学的に薄いので、光子は銀河団中の電子によって一度のみ散乱されると考える。また、銀河団中の電子は、等温・球対称に分布すると仮定する。そして自然単位系 ( $\hbar = c = 1$ ) を用いて記述する。これらの条件の下、コンプトン散乱過程を考えてゆく。

さて、銀河団の中心に座標系の原点を置き、光子の分布関数  $n(\omega)$  に対する時間発展方程式 (ボルツマン方程式) を書き下すと、

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W \{n(\omega)[1 + n(\omega')f(E) - n(\omega')[1 + n(\omega)f(E')]\} \quad (2.31)$$

$$W = \frac{(e^2/4\pi)^2 \bar{X} \delta^4(p + k - p' - k')}{2\omega\omega'EE'} \quad (2.32)$$

$$\bar{X} = -\left(\frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa}\right) + 4m^4 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'}\right)^2 - 4m^2 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'}\right) \quad (2.33)$$

$$\kappa = -2(p \cdot k) = -2\omega E \left(1 - \frac{|\mathbf{p}|}{E} \cos \alpha\right) \quad (2.34)$$

$$\kappa' = 2(p \cdot k') = 2\omega' E \left(1 - \frac{|\mathbf{p}|}{E} \cos \alpha'\right) \quad (2.35)$$

となる。この方程式は、周波数  $\omega$  で入射した光子が  $\omega'$  となって散乱される光子から、 $\omega'$  で入射した光子が  $\omega$  となって散乱される光子を引いたものになっている。ここで、 $W$  は、コンプトン散乱の遷移確率を表す。また、電子及び光子の初期状態の4元運動量をそれぞれ、 $p = (E, \mathbf{p})$ 、 $k = (\omega, \mathbf{k})$  とし、終状態の4元運動量をそれぞれ、 $p' = (E', \mathbf{p}')$ 、 $k' = (\omega', \mathbf{k}')$  とする。角度  $\alpha$ 、 $\alpha'$  はそれぞれ、 $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{k}$  がなすの角度、 $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{k}'$  がなす角度を表す。

銀河団内の電子の分布は厳密にはフェルミ分布であるが、次に、銀河団中の電子は高温であるため、銀河団内の電子の分布は相対論的マクスウェル分布であると仮定する。すなわち、電子が温度  $T_e$  を持つとすると、エネルギー  $E$  の時の電子のフェルミ分布  $f(E)$  は

$$f(E) = \left( e^{[(E-m) - (\mu-m)]/k_B T_e} + 1 \right)^{-1} \approx e^{-[K - (\mu-m)]/k_B T_e} \quad (2.36)$$

と近似できる。ここで、 $K \equiv (E - m)$  とした。さて、ここで電子の温度で無次元化した宇宙背景放射の周波数を

$$x \equiv \frac{\omega}{k_B T_e} \quad (2.37)$$

$$\Delta x \equiv \frac{\omega' - \omega}{k_B T_e} \quad (2.38)$$

と定義し、エネルギー保存則の関係を用いると、

$$f(E') = f(E)e^{\Delta x} \quad (2.39)$$



であることが導かれる。(2.39) 式を (2.31) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \\ &\times \{n(\omega)[1+n(\omega')] - n(\omega')[1+n(\omega)]e^{\Delta x}\} \end{aligned} \quad (2.40)$$

となる。数値積分による厳密解は、この積分を解く事になる。

一方、展開計算は、まず、(2.40) 式の  $\{ \}$  の中を考える。 $\Delta x \ll 1$  として指数関数を展開し、また  $n(\omega') = n(\omega + \Delta\omega)$  として展開できるので、これらを 式に代入してまとめると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= 2 \left[ \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] I_1 \\ &+ 2 \left[ \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 2(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] I_2 \\ &+ 2 \left[ \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} + 3(1+n) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 3(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] I_3 \\ &+ 2 \left[ \frac{\partial^4 n}{\partial x^4} + 4(1+n) \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} + 6(1+n) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 4(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] I_4 \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (2.41)$$

となる。ここで、

$$I_k \equiv \frac{1}{k!} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) (\Delta x)^k \quad (2.42)$$

となっている。この (2.42) 式を Mathematica を用いて展開していく。 $I_k$  を  $1 \leq k \leq 10$  の範囲で求める。この範囲までとる理由については付録 A.2 を参照していただきたい。

宇宙背景放射の初期分布  $n(\omega)$  を近似的にプランク分布：

$$n_0 = \frac{1}{e^X - 1} \quad (2.43)$$

であるとする。求まった  $I_k$  と、

$$\begin{aligned} x &= \frac{T_0}{T_e} \frac{\omega}{k_B T_0} \\ &= \frac{T_0}{T_e} X \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{T_e}{T_0} \frac{\partial}{\partial X} \quad (2.45)$$

$$n(\omega) = \frac{1}{e^X - 1} \quad (2.46)$$

$$X \equiv \frac{\omega}{k_B T_e} \quad (2.47)$$

を (2.41) 式に代入して、 $T_0/T_e \ll 1$  として計算する。その結果を、宇宙背景放射が銀河団を通過する時間で積分し、プランク分布  $n_0$  で規格化することによって、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果による相対的な分

布変化として、

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\tau \theta_e X e^X}{e^X - 1} [Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4] \quad (2.48)$$

$$n_0 \equiv \frac{1}{e^X - 1} \quad (2.49)$$

が得られる。 $Y_0 \sim Y_4$  までの計算結果については、A.2 の (A.107) 式 ~ (A.111) 式として掲載されている。ここで、

$$\tau \equiv \sigma_T \int dl N_e \quad (2.50)$$

$$\theta_e \equiv \frac{k_B T_e}{mc^2} \quad (2.51)$$

と定義される。 $\tau$  は光学的深さ、 $\theta_e$  は電子の無次元温度を表している。さて、ここで、散乱前後の光子の数  
が変化しない事が重要であるが、 $Y_0$  から  $Y_4$  まで全てで光子数の変化

$$\int dX X^2 \Delta n(X) \quad (2.52)$$

を求めると、この積分値が解析的に全て 0 になり、確かに光子数が変化していない事がわかる。数値積分より  
求まる厳密解においても、積分結果は  $< 10^{-9}$  となり、同様に光子数は保存することが確認できる。こうして  
相対論的補正を考慮した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式が求められたのだが、 $Y_0$  の項に注目す  
ると、これはまさにスニャエフとゼルドビッチによって求められた式である事がわかる。すなわち、 $Y_1 \sim Y_4$   
が相対論的補正項を表わしている。

最後に、実際に観測される強度変化として、黒体放射の式より

$$\Delta I = \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n(X)}{n_0(X)} \quad (2.53)$$

と定義しておく。これを、観測によって決まる量である光学的深さ  $\tau$  で割って  $\Delta I/\tau$  を熱的スニャエフ・ゼ  
ルドビッチ効果を表わすグラフと定義し、それをういてグラフの比較等の操作を行っていく。なお、以上の  
計算結果は、 $\theta_e^5$  までの展開式であるが、以降の議論で、展開次数を表現する方法として、 $Y_0, Y_1, Y_2, Y_3,$   
 $Y_4$  を用いることにする。すなわち、 $\theta_e^i$  までの展開を、 $Y_0$  までの項を取り入れた展開と表現し、 $\theta_e^i (1 \leq i \leq 5)$   
までの展開を、 $Y_0 \sim Y_{i-1}$  までの項を取り入れた展開と表現することにする。

### 2.3.2 相対論的補正の重要性

展開式の話に移る前に、この厳密解を用いて相対論的補正の必要性を確認してみる。すなわち、相対論的  
に計算した結果と非相対論的に計算した結果の比較を行う。 $\Delta I/\tau$  で比較したも結果を図 2.2 に示し、非相対  
論的に計算した結果に対して、相対論的に計算した結果の変化の大きさを、

$$\delta \equiv \left| \frac{\Delta I_{\text{Relativistic}} - \Delta I_{\text{Non-Relativistic}}}{\Delta I_{\text{Non-Relativistic}}} \right| \quad (2.54)$$

と定義して計算した結果を図 2.3 に示す。これらを見れば、相対論的效果が無視出来ないことが分かる。特  
に、高周波側では、相対論的補正による差が顕著に出ていることが分かる。また、銀河団が高温になるにつ

れて、全体的に相対論的補正の寄与が大きくなっていることが分かる。例えば、図 2.3 から、銀河団の温度が 15keV の場合は、周波数の無次元量  $X \simeq 15$  ( $\nu \simeq 853$  GHz) では誤差  $\delta \sim 3$  である。すなわち、その場所では、相対論的計算結果は非相対論的計算結果の約 4 倍であることが分かる。因みに、クロスオーバー周波数付近では、誤差曲線にピークが表れているが、これは、その周波数付近で、熱的スニャエフゼルドピッチ効果のゼロ点があるからである。

さらに、運動学的スニャエフ・ゼルドピッチ効果の観測に最適であると考えられているクロスオーバー周波数付近を拡大した様子を図 2.4 に示す。相対論的補正をした熱的スニャエフ・ゼルドピッチ効果は、銀河団の温度によってクロスオーバー周波数の位置が高周波側へ移動していることが分かる。すなわち、相対論的補正を考慮した場合、クロスオーバー周波数は温度依存性をもつことを考慮に入れる必要がある。

伊藤、神山、野澤 [8] は、クロスオーバー周波数  $X_0$  に関するフィッティング式として、

$$X_0 = 3.830(1 + 1.167\theta_e - 0.8533\theta_e^2) \quad (2.55)$$

という関数を求めた。この式の精度は非常に高く、 $0 \leq k_B T_e \leq 50$  keV の領域で誤差  $10^{-3}$  以下である。(2.55) 式により計算した、銀河団の温度に対するクロスオーバー周波数の値を表 2.1 に示した。表 2.1 から分かる

$k_B T_e$ [keV]	$\theta_e$	$X_0$	$\nu_0$ [GHz]	$\lambda_0$ [mm]
0	0	3.830	218	1.38
5	$\simeq 0.01$	3.873	220	1.36
10	$\simeq 0.02$	3.916	223	1.35
15	$\simeq 0.03$	3.958	225	1.33

表 2.1: 銀河団の温度 0keV、5keV、10keV、15keV でのクロスオーバー周波数無次元量  $X_0$  と、それに対応する周波数及び波長。因みに、 $\theta_e \equiv k_B T_e / mc^2$  である。

とおり、10 keV ( $\theta_e = 0.02$ ) の時、非相対論的な場合で約 218 GHz、相対論的な場合で約 222 GHz となり、5 keV 増加するごとに約 2 GHz ずつ増加している。運動学的スニャエフ・ゼルドピッチ効果を観測する時には、熱的スニャエフ・ゼルドピッチ効果がゼロになる周波数でなければ、観測が非常に難しい。この周波数の誤差によって、運動学的スニャエフ・ゼルドピッチ効果に対して強く影響を及ぼすと考えられるそのため、相対論的補正はこの先、観測機器の発達に伴って期待が高まっている運動学スニャエフゼルドピッチ効果の観測のために、非常に重要なものになってくると考えられる。

### 2.3.3 展開式の精度

#### 比較計算及び比較する範囲

展開式の性質を調べるために、銀河団の温度、周波数、展開次数などの計算条件を変えて、数値積分の結果と展開計算の結果を比較し、精度を評価した。調べる温度領域は、現在見つかった最も高温の銀で示されているように、銀河団の温度の多くが  $5 \leq k_B T_e \leq 15$  keV の範囲にあるため、5 keV、10 keV、15 keV、の場合で計算した。周波数範囲は、近い将来に高周波数側での電波観測が行われる予定であることを踏まえ、 $0 \leq X \leq 15$  ( $0 \leq \nu \leq 853$  GHz) の周波数範囲で求めたものを用いる。

また、比較には、数値積分との相対誤差：

$$\delta_{\text{thermal}} \equiv \left| \frac{(\Delta I)_{\text{analytic}} - (\Delta I)_{\text{numerical}}}{(\Delta I)_{\text{numerical}}} \right| \quad (2.56)$$

を定義して計算する。

#### 展開次数による精度の動き

展開次数を増やしていくとどのようになるかを、銀河団の温度ごとに調べる。

#### 銀河団温度 5 keV

数値積分のグラフと  $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.5 に示す。さらに、数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.56) 式の計算結果を図 2.6 示す。これらのグラフから、次のような考察ができる。

$X < 4$  の低周波数側では、高次の項までの展開により、飛躍的な精度の向上が見られる。特に、非相対論的スニャエフゼルドビッチ効果に対応する  $Y_0$  までの展開式の精度と比べ、より高次の項を含めることにより、精度の大幅な向上が見られている。また、クロスオーバー周波数付近 ( $X \sim 4$ ) では、厳密解自体が 0 に近い値を取り、その値が誤差の定義式 (2.56) から分かるとおり、分母に使われるので、他の領域に比べて相対誤差が大きくなってしまっている。しかし、クロスオーバー周波数付近の精度は、より高次の展開により、精度の向上が見られる。 $X > 4$  の高周波数側では、より高次の項まで展開した方が、定めた周波数範囲内の全域で、厳密解との誤差が小さくなる傾向を示している。

#### 銀河団温度 10 keV

数値積分のグラフと  $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.7 に示す。さらに、数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.56) 式の計算結果を図 2.8 に示す。これらグラフから、次のような考察ができる。

銀河団の温度が 5 keV の場合と同様の性質を示している。 $X < 4$  の低周波数側では、高次の項までの展開により、飛躍的な精度の向上が見られる。クロスオーバー周波数付近は、より高次の展開により、精度の向上が見られる。 $X > 4$  の高周波数側では、より高次の項まで展開した方が、定めた周波数範囲内の全域で、厳密解との誤差が小さくなる傾向を示している。

#### 銀河団温度 15 keV

数値積分のグラフと  $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.9 に示す。さらに、数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.56) 式の計算結果を図 2.10 示す。これらグラフから、次のような考察ができる。

$X < 4$  の低周波数側では、高次の項までの展開により、飛躍的な精度の向上が見られる。クロスオーバー周波数付近は、より高次の展開により、精度の向上が見られる。 $X > 4$  の高周波数側では、かなり高周波数側では、展開次数を上げてほとんど誤差が向上していない部分があるが、高次の項までの展開により、大部分の領域で厳密解との誤差が小さくなる傾向を示している。

## 備考

全体的な性質として、展開式の精度が急激に良くなる部分がある。すなわち、誤差曲線に、下方へ鋭く伸びる形状が存在している。それは、展開式が、厳密解である数値積分の曲線を中心として振動しているため、展開式の曲線が厳密な曲線と交差するということが関係している。このようなことが関係して、より低次の展開式の結果のほうが、精度が良くなっているところも見られる。それぞれの展開式は、交差する場所が様々であるから、例えば、 $Y_3$  までの展開式の曲線が厳密な曲線と交差した点の付近では、より高次である  $Y_4$  までの展開式の曲線よりも厳密な曲線に近付いていると考えることができる。もし、その点でプロットした数値を用いて誤差を計算した場合、 $Y_4$  までの展開式よりも誤差が小さいという結果を得るはずである。振動している展開の曲線が厳密な曲線と交差する点では、計算上は誤差  $\delta$  がゼロである。そして、図 2.11 の縦軸は誤差の対数であるから、 $-\infty$  方向に減衰するのである。しかし、実際は丁度交差する周波数でグラフを表示してないために、減衰が途中で収まっている。このように、精度の逆転は、展開式の曲線の性質から説明できる。

## 銀河団の温度に対する展開式の精度

$Y_0 \sim Y_4$  までの項を取り入れた展開計算の数値積分に対する相対誤差を (2.56) 式により計算する。この値を、 $k_B T_e = 5 \text{ keV}$ 、 $10 \text{ keV}$ 、 $15 \text{ keV}$  の場合で計算した結果を重ね合わせたグラフを図 2.11 に表わす。図 2.11 から、次のような考察ができる。

電子の温度が大きくなると誤差が大きくなる様子が表れている。この展開計算は無次元温度の漸近展開で近似計算しており、高温になるにつれて、その近似は有効ではなくなるために誤差が悪くなると考えられる。

今度は、周波数領域別で精度を確認してみる。まず、 $\Delta x$  の展開の精度が良いレイリー・ジーンズ領域 ( $X < 4$ ) を考える。この領域での展開式の精度は非常に良く、特に、どの温度の場合でも、 $X \rightarrow 0$  での  $\delta$  の値は  $10^{-5}$  以下に収束している事がわかる。これは、展開計算の正しさを示す結果である。逆にこの領域では、数値積分よりも漸近展開による値の方が、精度が良いとも考えられる。よって、 $X \rightarrow 0$  での精度は、数値積分の精度を表している、と考えることもできる。それによると、数値積分の精度は  $10^{-5} \sim 10^{-6}$  である事が分かる。一方、ウィーン領域 ( $X > 4$ ) を見てみる。この領域においては、展開式は非常に収束が遅く、レイリー・ジーンズ領域と比べて、かなり精度が落ちてしまっている。

それぞれの温度での誤差の程度について確認してみると、銀河団の温度が  $5 \text{ keV}$  と  $10 \text{ keV}$  の場合は、 $X \leq 15 (\nu \leq 853 \text{ GHz})$  の範囲で約 1% 以内に収まっている。一方、 $15 \text{ keV}$  の場合は、高周波数側で近似が悪くなっている。 $X \leq 10 (\nu \leq 568 \text{ GHz})$  の範囲では、部分的に 1% ラインを割っているのだが、全体的に約 1% 以内に収まっている。

## 備考

この「約 1% 以内」という基準は、観測の精度が 1% というオーダーの精度に達していないという現状や、近い将来に高精度の測定ができる観測機が開発される状況から考え、理論的解析式としては理想的な誤差の範囲であると考えられる。

## 比較結果のまとめ

展開次数を増加させると、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、定められた周波数域の全域において、精度の向上が見られる。さらに、銀河団の温度が 15 keV の場合でも、極めて高周波数である領域を除いて、精度の向上が見られる。結果としては、 $Y_0 \sim Y_4$  までの項を含めた展開式が最も精度が良く、高次の項を含めることの重要性を表わしている。

そして、 $Y_0 \sim Y_4$  までの項を取り入れた展開式の精度は、高温になるにつれて精度が悪くなる傾向を示している。それぞれの温度での誤差の程度について確認してみると、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、 $X \leq 15 (\nu \leq 853 \text{ GHz})$  の範囲で約 1% 以内に収まっている。一方、15 keV の場合は、高周波数側で近似が悪くなっている。 $X \leq 10 (\nu \leq 568 \text{ GHz})$  の範囲では、部分的に 1% ラインを割っているのだが、全体的に約 1% 以内に収まっている。

総合結果として、我々の展開式は、精度としては大変有効であると考えられる。

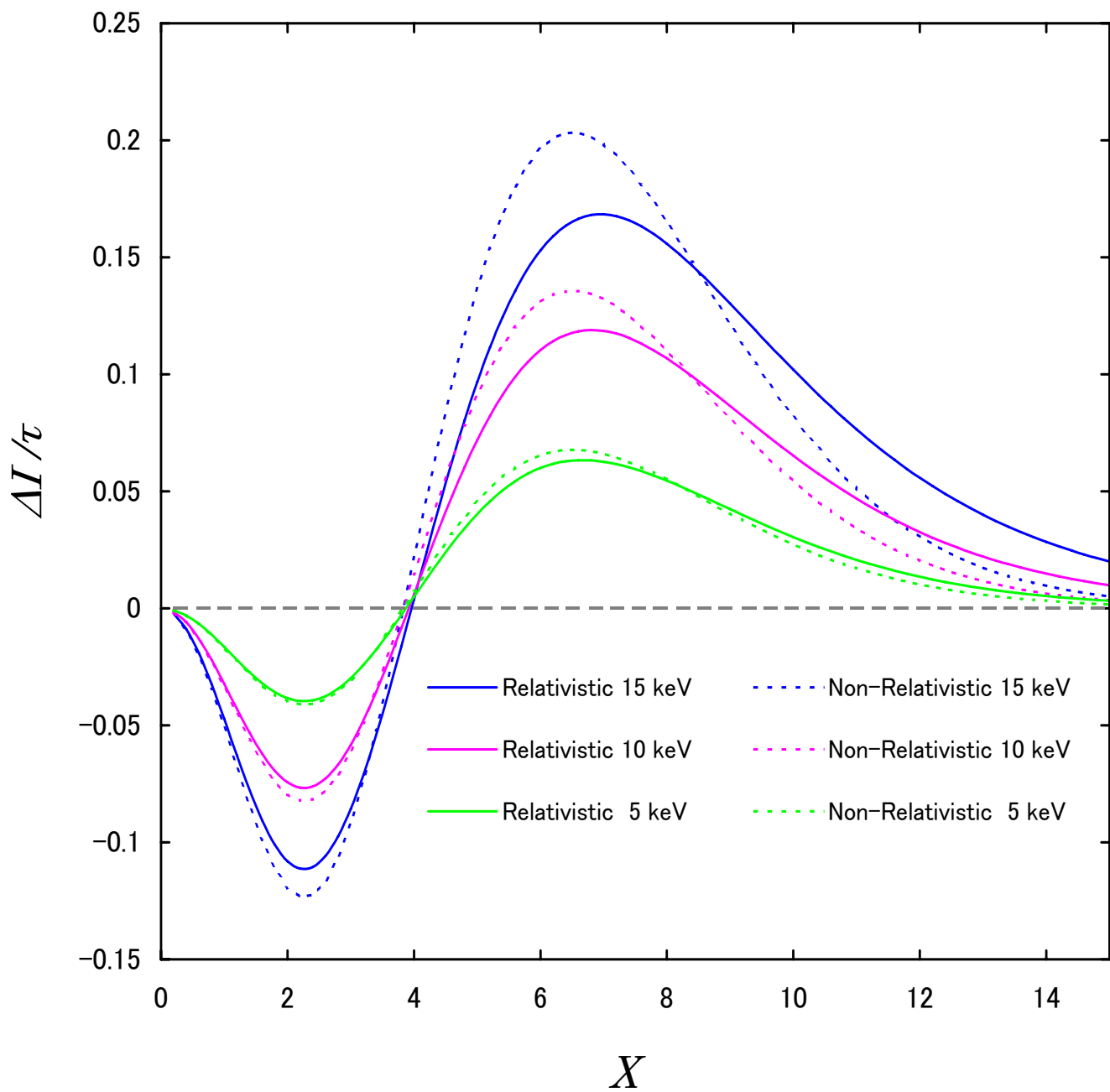


図 2.2: 相対論的に計算した結果と非相対論的に計算した結果を、銀河団温度 5 keV、10 keV、15 keV の場合で重ね合わせたグラフ。

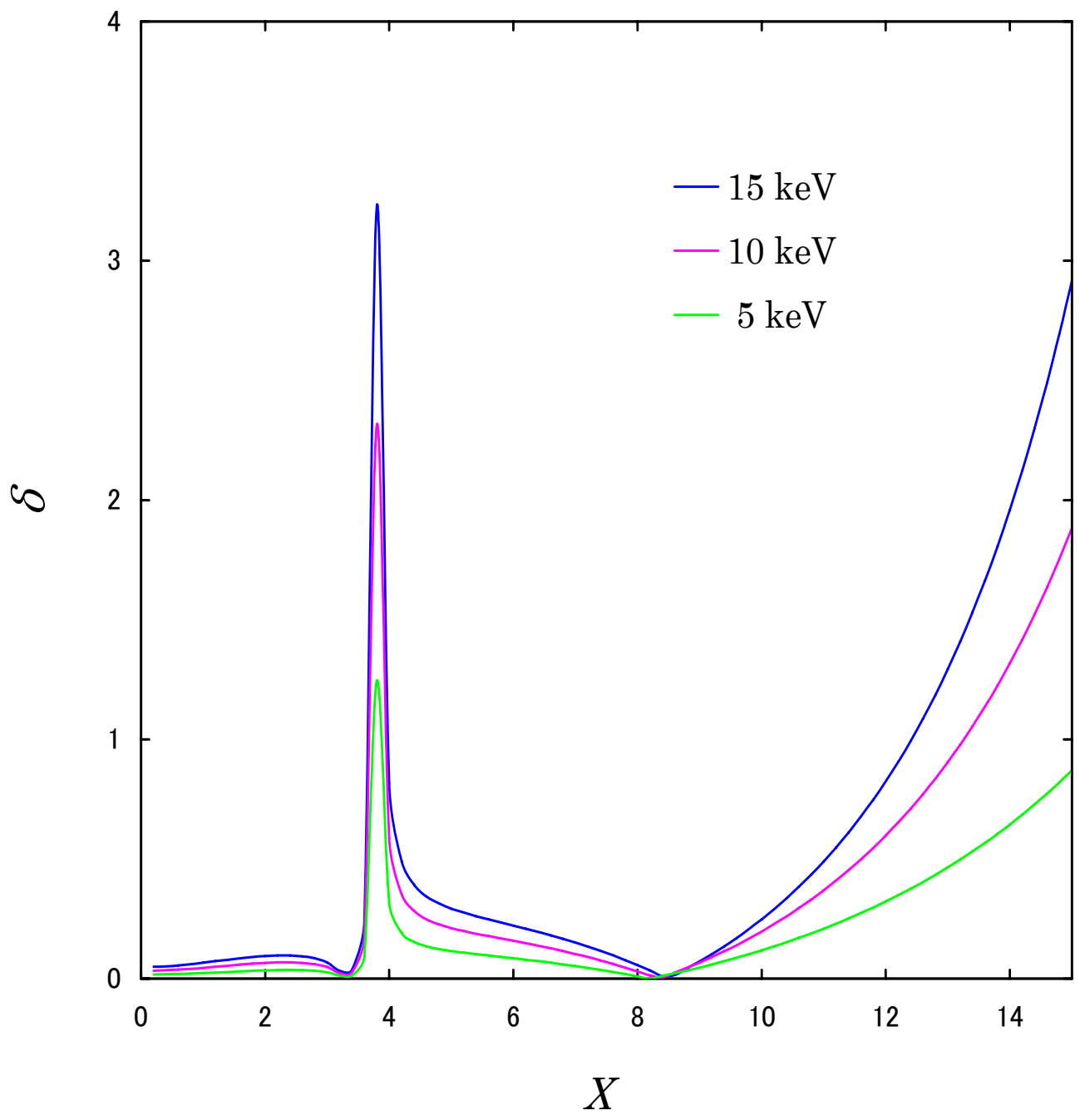


図 2.3: 非相対論的計算結果に対する相対論的計算結果の相対的な変化を、銀河団温度 5 keV、10 keV、15 keV の場合で重ね合わせたグラフ。



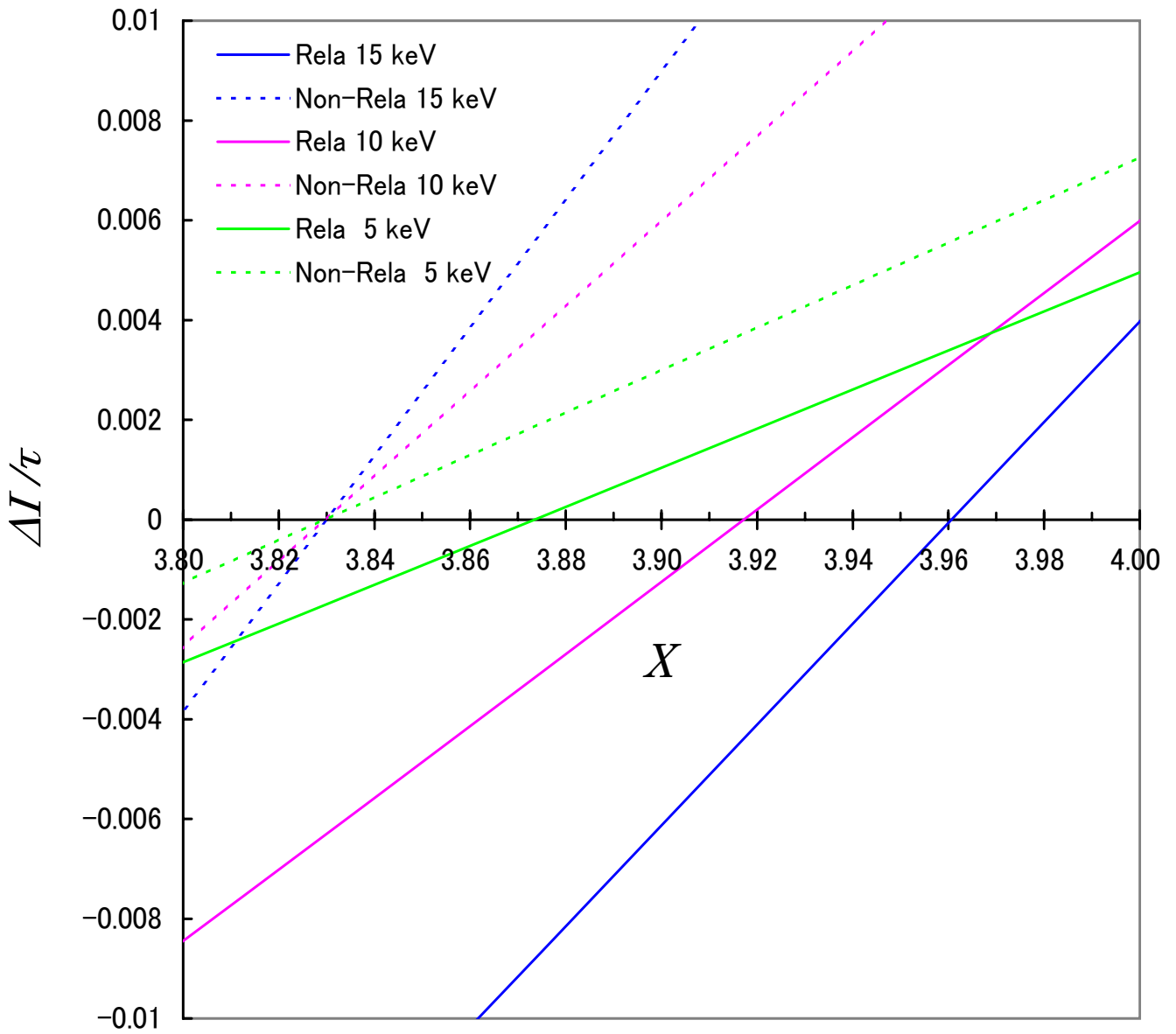


図 2.4: 非相対論的計算によるスニャエフ・ゼルドビッチ効果のクロスオーバー周波数周辺と相対論的計算によるスニャエフ・ゼルドビッチ効果のクロスオーバー周波数周辺を拡大したグラフ。“Rela”は相対論的計算結果で、“Non-Rela”は非相対論的計算結果である。

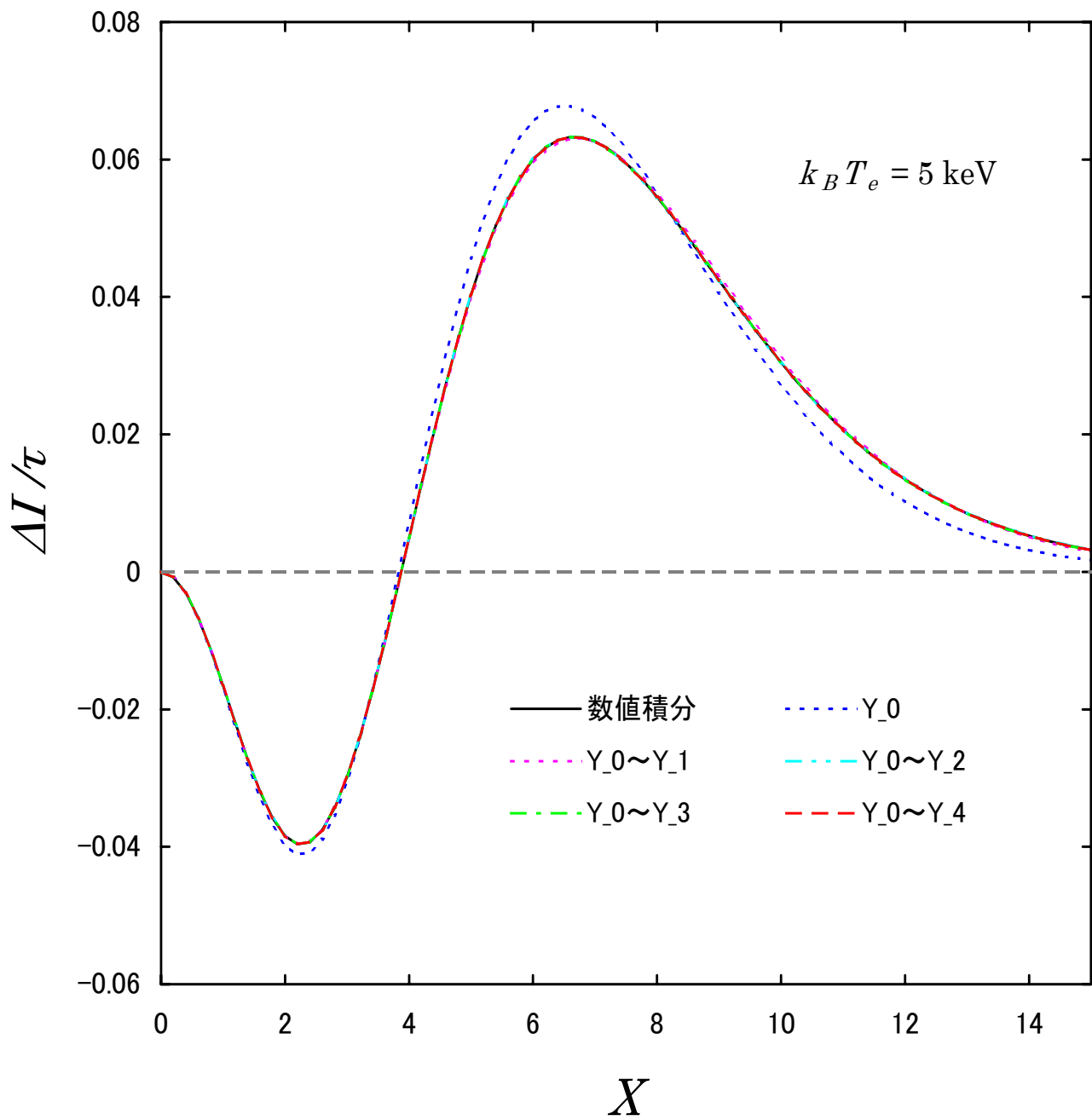


図 2.5: 5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

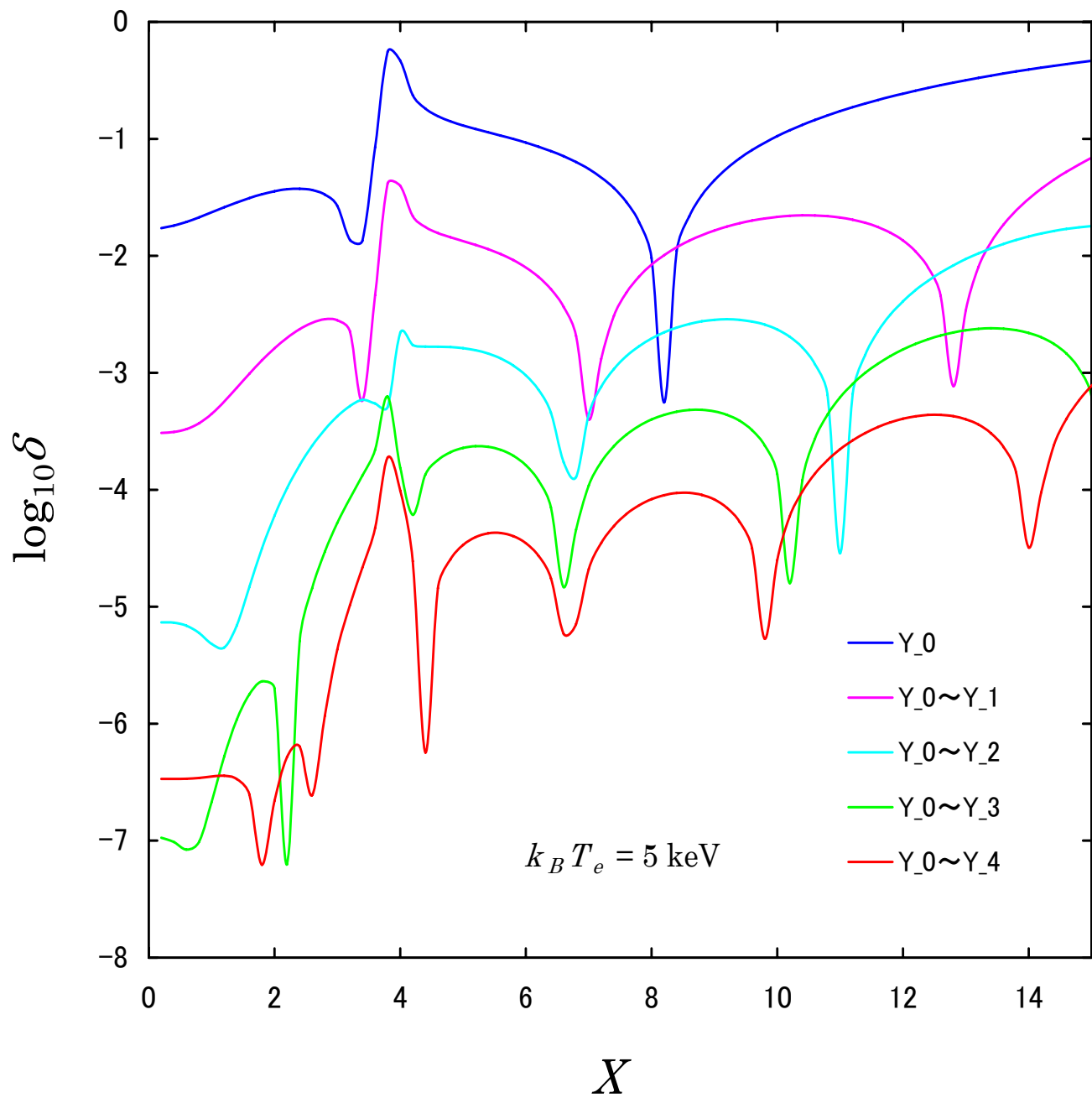


図 2.6: 5 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

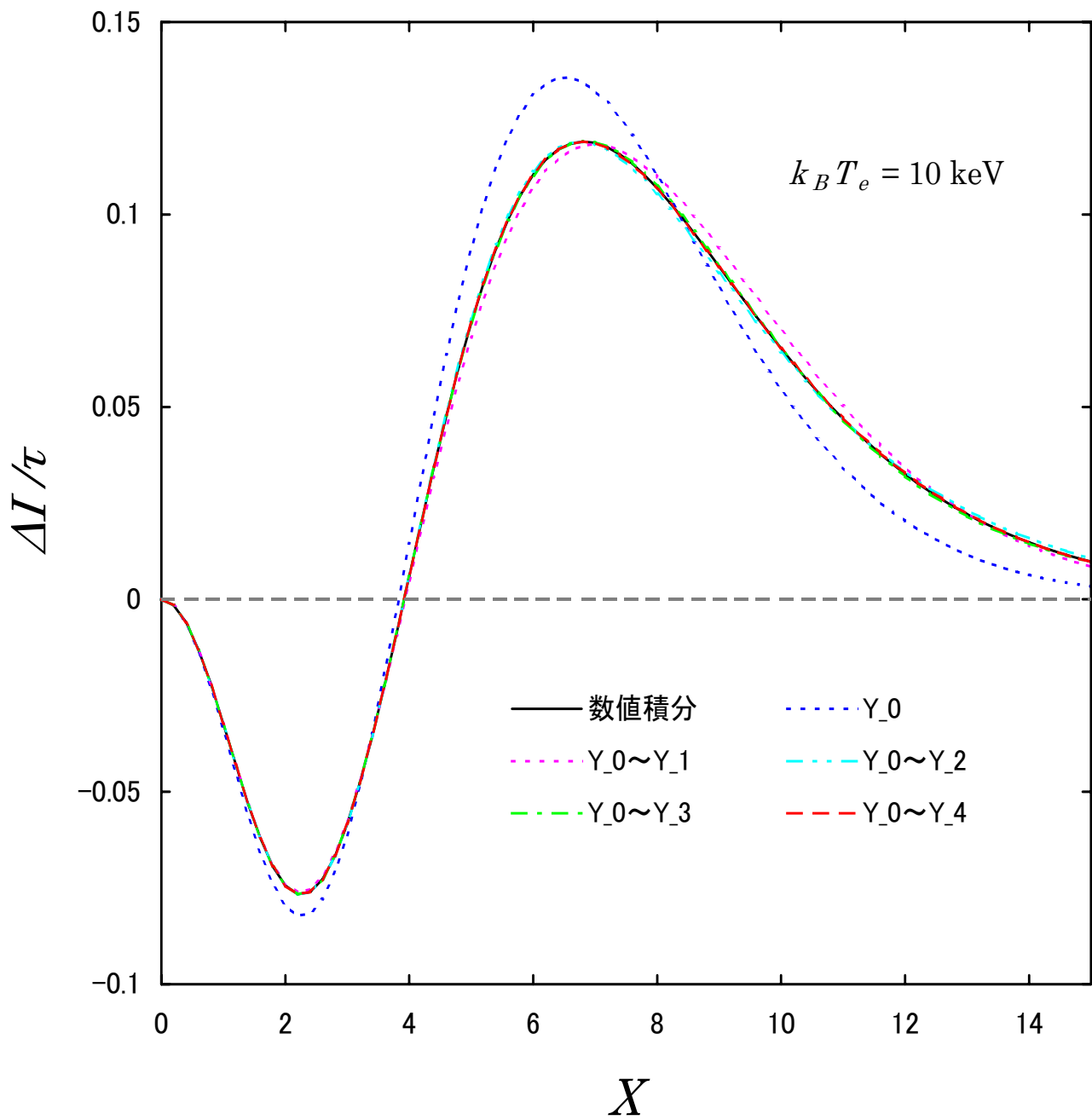


図 2.7: 10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

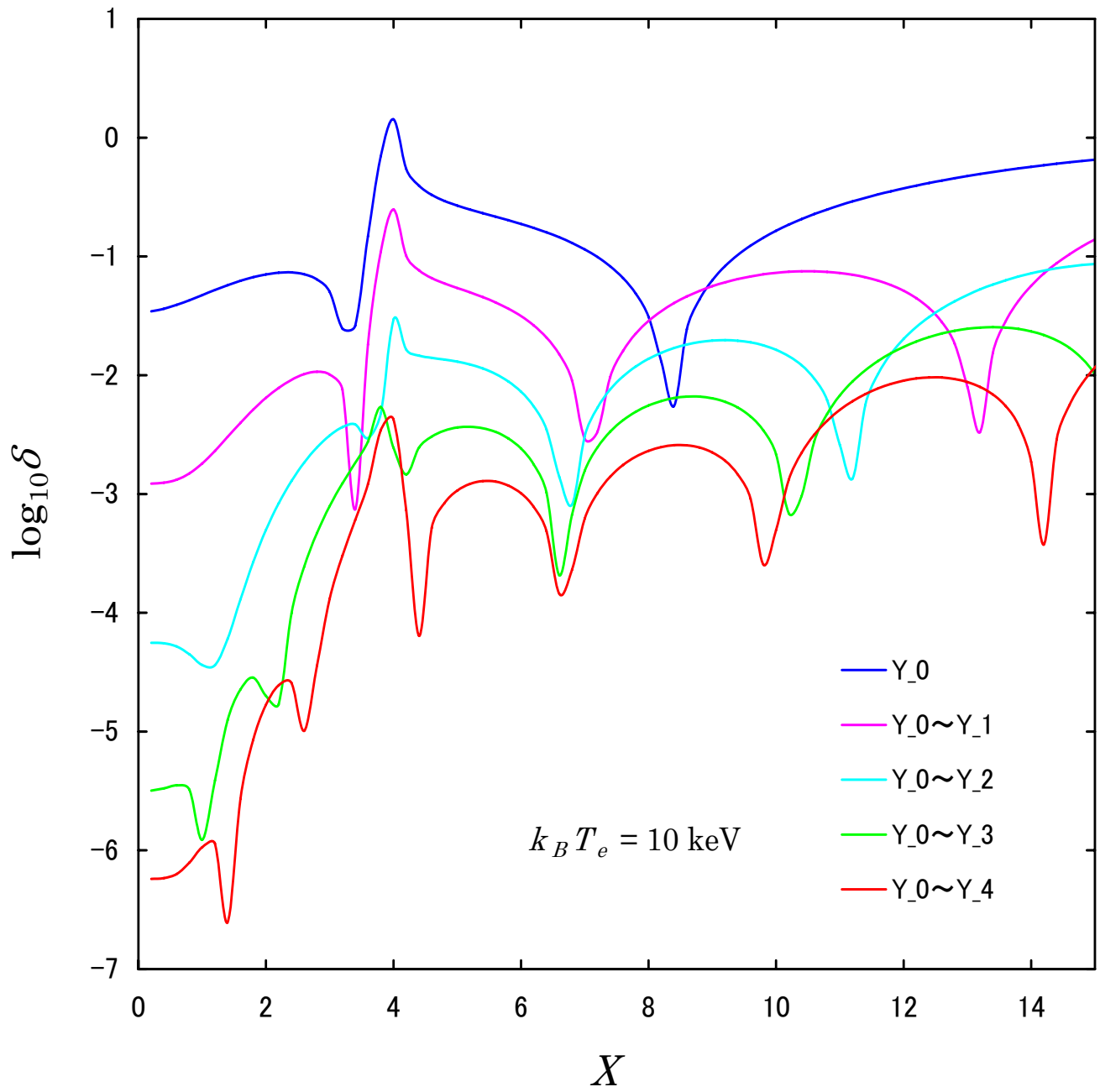


図 2.8: 10 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ

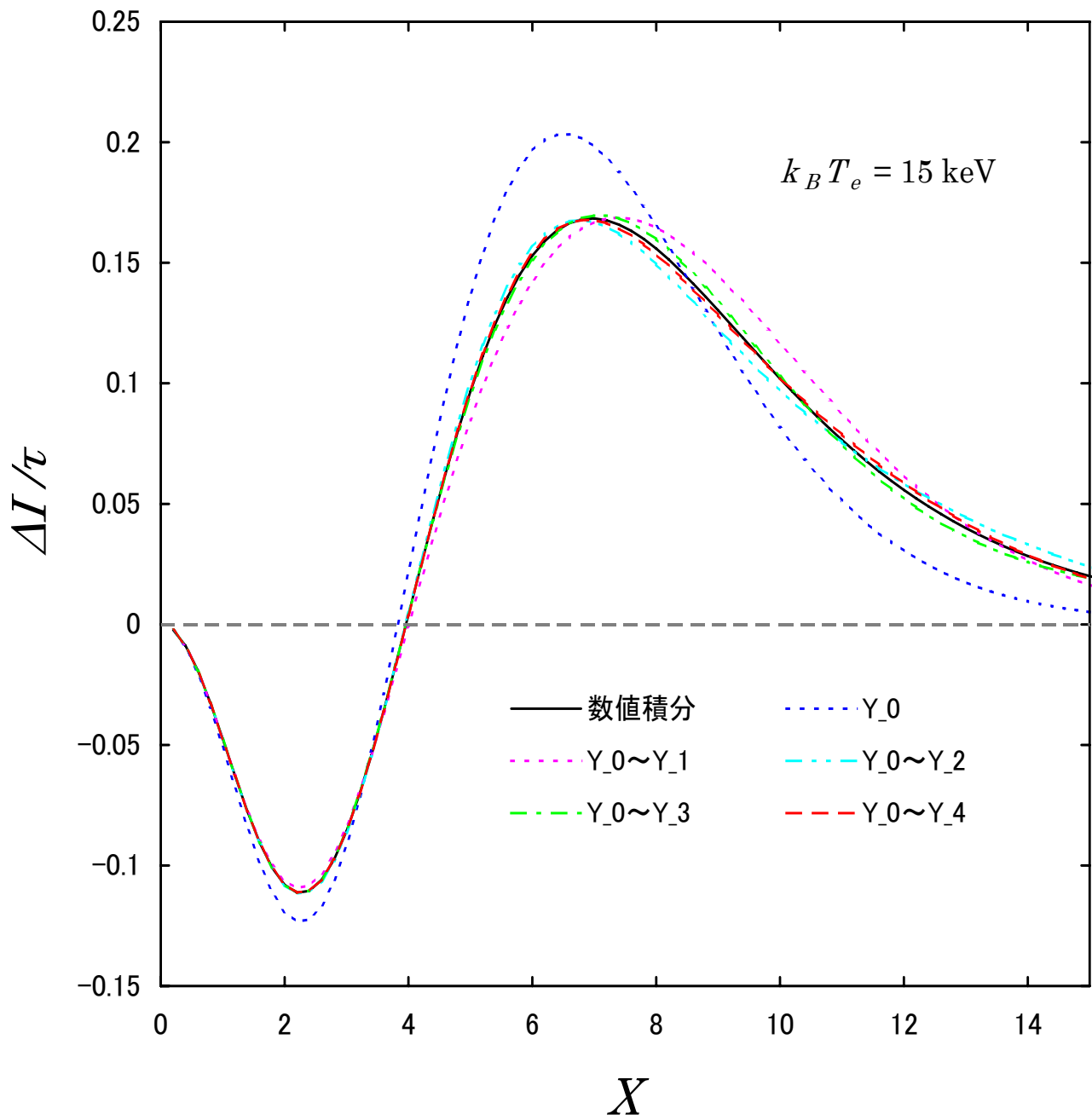


図 2.9: 15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

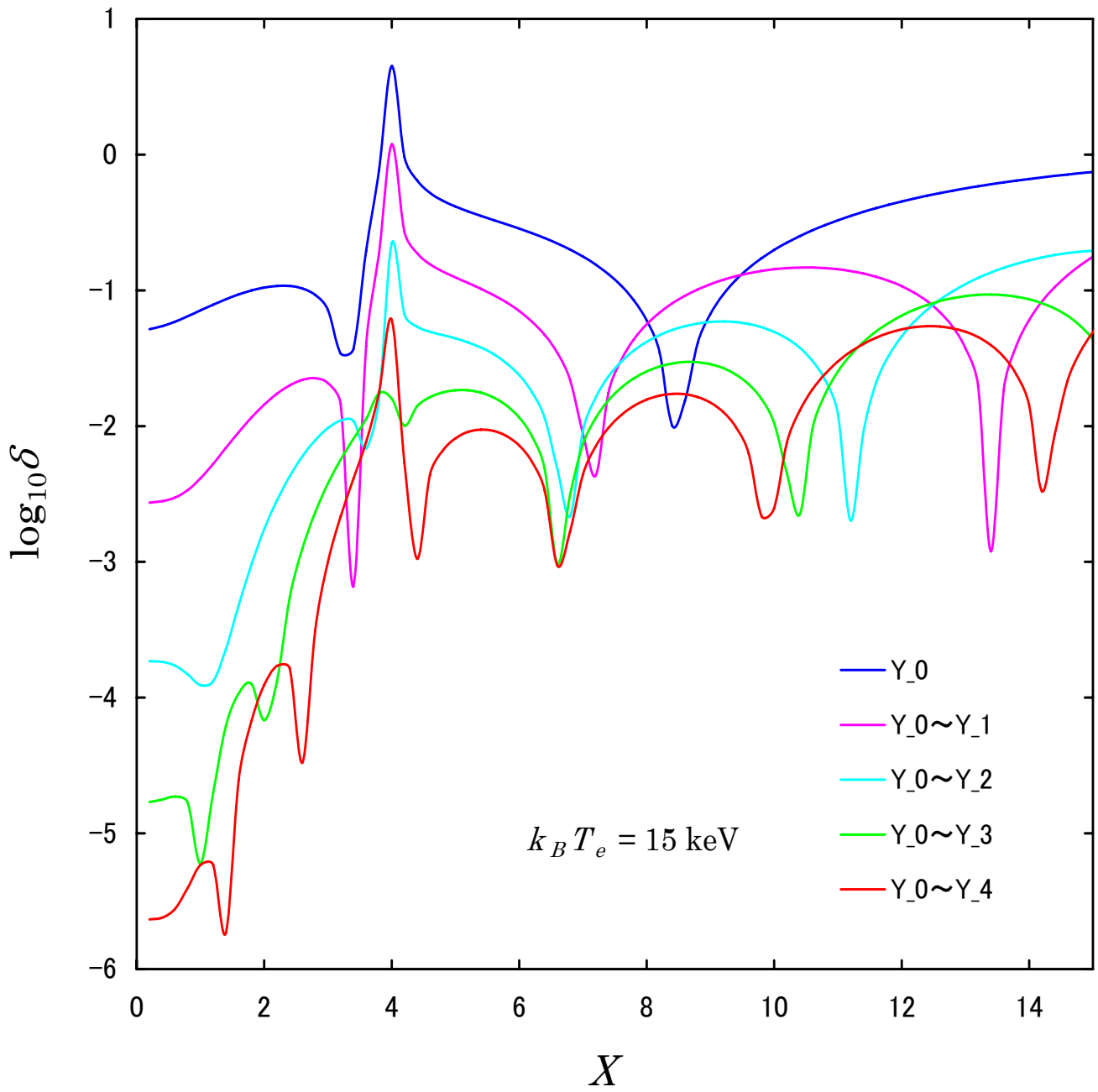


図 2.10: 15 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0$ 、 $Y_0 \sim Y_1$ 、 $Y_0 \sim Y_2$ 、 $Y_0 \sim Y_3$ 、 $Y_0 \sim Y_4$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ

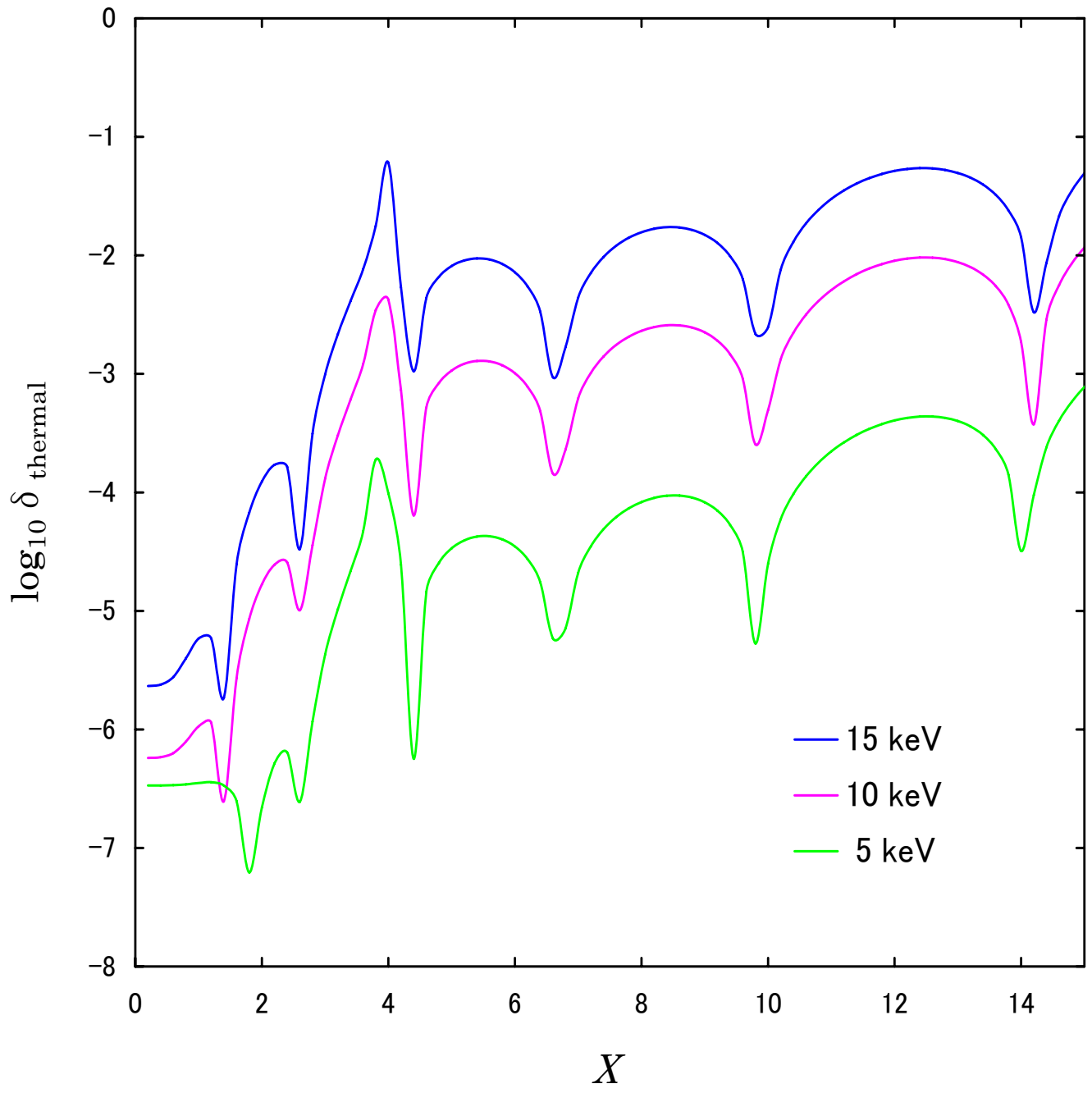


図 2.11:  $Y_0 \sim Y_4$  までの項を取り入れた展開計算の数値積分に対する相対誤差を、銀河団温度 5 keV、10 keV、15 keV の場合で重ね合わせたグラフ。



## 2.4 相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の高次展開

さて、これまで述べてきた結果は、1998年に伊藤・神山・野澤 [8] によって既に計算された。さらに、2001年に伊藤、川名、野澤、神山 [43] によって2回散乱の計算が行われた。そのときに使われた1回散乱の展開式は、 $\theta_e^7$  まで考慮した  $Y_6$  の項まで計算された。ここでは、 $\theta_e$  による展開に関して、より高次の項まで考慮した時に、展開式がどのような振る舞いをするのかを詳しく調べていくため、出来る限り次数を上げ、最終的に  $\theta_e^{11}$  まで考慮した  $Y_{10}$  の項まで計算することができた。そこで、 $Y_{10}$  の項までの計算結果について述べることにする。2.3.1 で述べている計算を高次まで拡張したものであるから、展開式は、(2.48) 式と同様に、

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\tau \theta_e X e^X}{e^X - 1} [Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \theta_e^6 Y_6 + \theta_e^7 Y_7 + \theta_e^8 Y_8 + \theta_e^9 Y_9 + \theta_e^{10} Y_{10}] \quad (2.57)$$

という形式でまとめることができる。 $Y_5 \sim Y_{10}$  までの計算結果については、??に掲載されている。

### 2.4.1 展開式の精度

#### 比較計算及び比較する範囲

高次の項を含めると、厳密解に対する展開の精度はどのようになるかを調べてみる。銀河団の温度と周波数範囲については、2.3.3 と同様である。

また、比較には、数値積分との相対誤差：

$$\delta_{\text{thermal}} \equiv \left| \frac{(\Delta I)_{\text{analytic}} - (\Delta I)_{\text{numerical}}}{(\Delta I)_{\text{numerical}}} \right| \quad (2.58)$$

を定義して計算する。

#### 展開次数と精度の動き

展開次数を増やしていくとどのようになるかを、銀河団の温度ごとに調べるが、比較する曲線が多くなるので、次のように2つの回グラフに分けて示すことにする。

展開次数と精度の動き及び展開式の精度評価で用いるグラフは、 $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$  までの項を取り入れた展開式、 $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を取り入れた展開式という形式で展開次数範囲を2つに分けて表示することにする。

#### 銀河団温度 5 keV

数値積分のグラフと  $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.12 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.58) 式の計算結果を図 2.13 に示す。数値積分のグラフと  $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.14 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.58) 式の計算結果を図 2.15 に示す。これらグラフから、次のような考察ができる。

展開次数を増やしていくと、低周波数極限付近は  $10^{-6}$  未満という高い精度まで収束している。クロスオーバー周波数付近では、2.3.3 で説明した理由により、他の領域と比べて誤差が大きくなっているが、展開次数

を上げることにより、さらに誤差が減少している。ウィーン領域では、より高次の項まで展開した方が厳密解との誤差が小さくなる傾向を示している。誤差曲線のピーク部分を除けば、展開次数を増やしていくと、 $0 \leq X \leq 15$  の領域全体で精度が向上している。

全体的な傾向として、より高次の項を含めることにより、精度の大幅な向上が見られている。

#### 銀河団温度 10 keV

数値積分のグラフと  $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.16 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.58) 式の計算結果を図 2.17 に示す。数値積分のグラフと  $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.18 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.58) 式の計算結果を図 2.19 に示す。これらグラフから、次のような考察ができる。

展開次数を増やしていくと、低周波数極限付近は  $10^{-5}$  未満という高い精度まで収束している。クロスオーバー周波数付近では、2.3.3 で説明した理由により、他の領域と比べて誤差が大きくなっているが、展開次数を上げることにより、さらに誤差が減少している。高周波数側では、誤差曲線の負の方向に伸びるピーク部分を除けば、展開次数を増やしていくと、 $0 \leq X \leq 15$  の領域全体で精度が向上している。

5 keV の場合と同様に、全体的な傾向として、より高次の項を含めることにより、精度の大幅な向上が見られている。

#### 銀河団温度 15 keV

数値積分のグラフと  $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.20 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.58) 式の計算結果を図 2.21 に示す。数値積分のグラフと  $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.22 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.58) 式の計算結果を図 2.23 に示す。これらグラフから、次のような考察ができる。

展開次数を増やしていくと、低周波数極限付近は  $10^{-5}$  未満という高い精度まで収束している。

クロスオーバー周波数付近では、2.3.3 で説明した理由により、他の領域と比べて誤差が大きくなっているが、展開次数を上げることにより、さらに誤差が減少している。

高周波数側では、展開次数を増やしても精度がそれほど向上せず、逆に精度が悪くなっている部分も存在するが、特に、クロスオーバー周波数寄りの部分で、精度の向上が見られている。

全体的な傾向として、より高次の項を含めることにより、精度の大幅な向上が見られている。

#### 銀河団の温度に対する展開式の精度

$Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の数値積分に対する相対誤差を (2.58) 式により計算する。この値を  $k_B T_e = 5$  keV、10 keV、15 keV の場合で計算した結果を重ね合わせたグラフを図 2.24 に示す。図 2.24 から、次のような考察ができる。

電子の温度が大きくなると誤差が大きくなる様子が表れている。

今度は、周波数領域別で精度を確認してみる。まず、レイリー・ジーンズ領域を考える。特に、 $X$  が 0 に近い部分を見ると  $\delta$  の値は、どの温度の場合でも  $10^{-6}$  以下という精度で厳密解と一致している事がわかる。ここでの結果も、展開式の正しさを示している。そして、 $X > 4$  のウィーン領域を見してみる。この領域にお

いては、特に高温の場合に展開式は非常に収束が遅く、レイリー・ジーンズ領域と比べると、精度が落ちてしまっている。

それぞれの温度での誤差の程度について確認してみると、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、 $X \leq 15 (\nu \leq 853 \text{ GHz})$  の範囲で約 1% 以内に収まっている。そして、15keV の場合は、高周波数側で近似が悪くなっている。 $X \leq 11 (\nu \leq 625 \text{ GHz})$  の範囲では、約 1% 以内に収まっている。高周波数側で近似が悪くなる傾向は同じだが、p.62 の図 2.11 の結果に比べると、全体的に精度が増していることが分かる。

#### 比較結果のまとめ

展開次数を増加させると、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、定められた周波数域の全域において、精度の向上が見られる。さらに、銀河団の温度が 15 keV の場合でも、極めて高周波数である領域を除いて、精度の向上が見られる。結果としては、銀河団の温度が低温の場合では、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を含めた展開式が最も精度が良く、銀河団の温度が高温の場合でも、ほとんどの領域で、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を含めた展開式が最も精度が良いという結果が得られた。これは、高次の項を含めることの重要性を表わしている。

そして、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を取り入れた展開式の精度は、高温になるにつれて精度が悪くなる傾向を示している。それぞれの温度での誤差の程度について確認してみると、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、 $X \leq 15 (\nu \leq 853 \text{ GHz})$  の範囲で約 1% 以内に収まっている。そして、15keV の場合は、高周波数側で近似が悪くなっている。 $X \leq 11 (\nu \leq 625 \text{ GHz})$  の範囲では、約 1% 以内に収まっている。高周波数側で近似が悪くなる傾向は同じだが、p.62 の図 2.11 の結果に比べると、全体的に精度が増していることが分かる。

総合結果として、我々の展開式は、精度としては大変有効であると考えられる。しかし、全く問題が無いわけではない。2.3.3 の結果よりも展開式の精度が飛躍的に向上したが、数式の量が非常に多いため、観測データの解析のために用いる理論式としては実用的とは言い難いと考えられる。

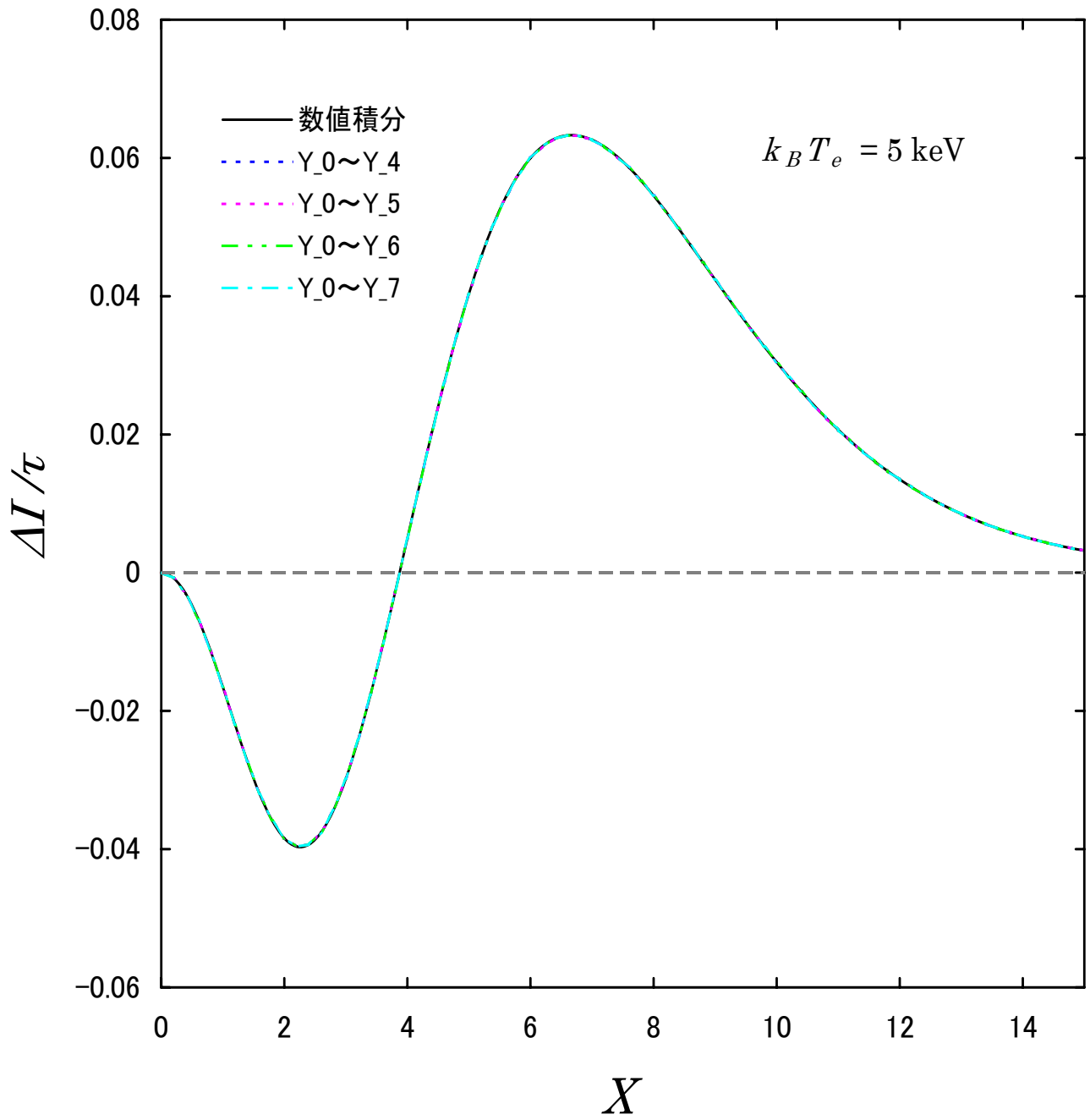


図 2.12: 5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

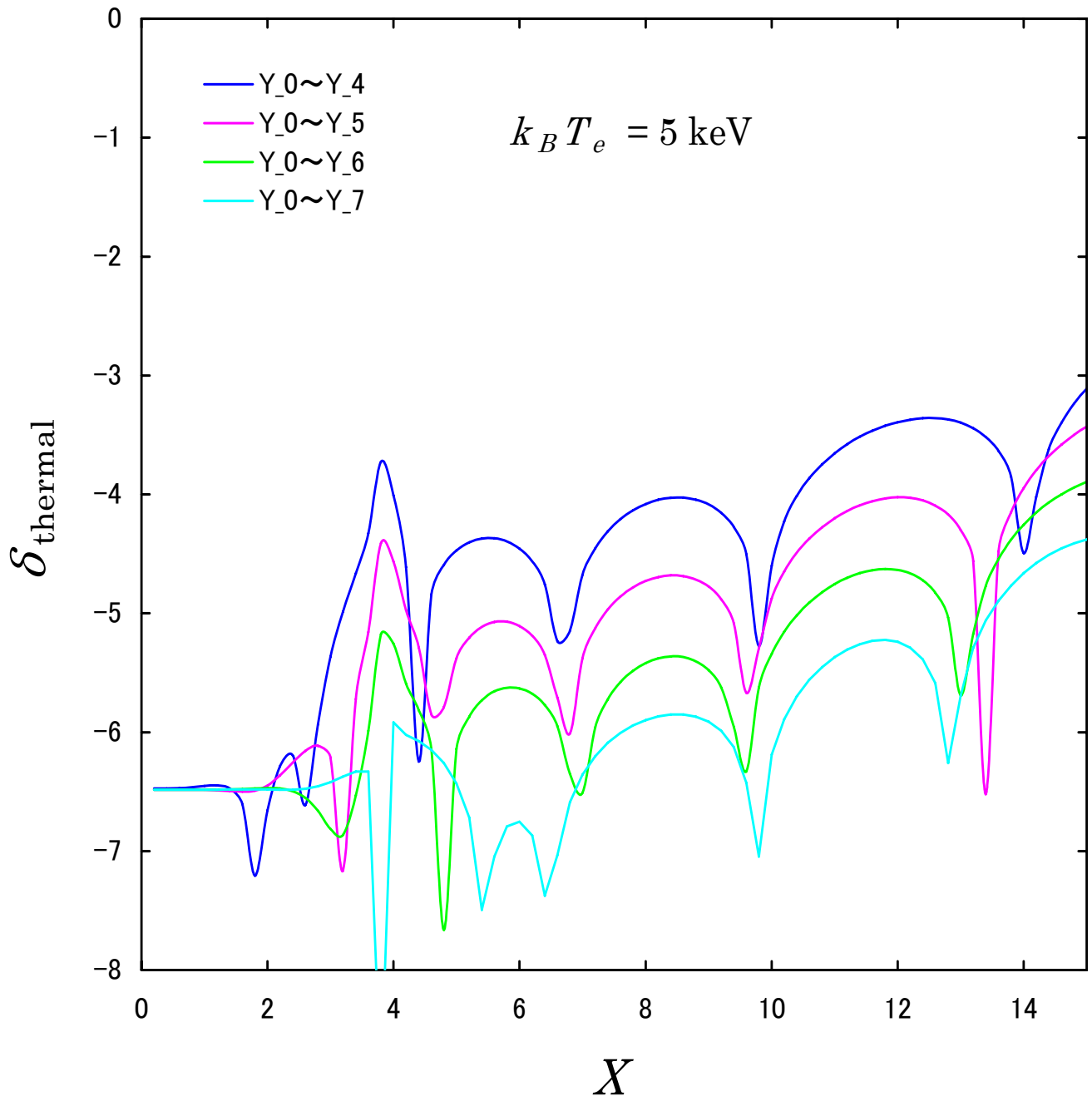


図 2.13: 5 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

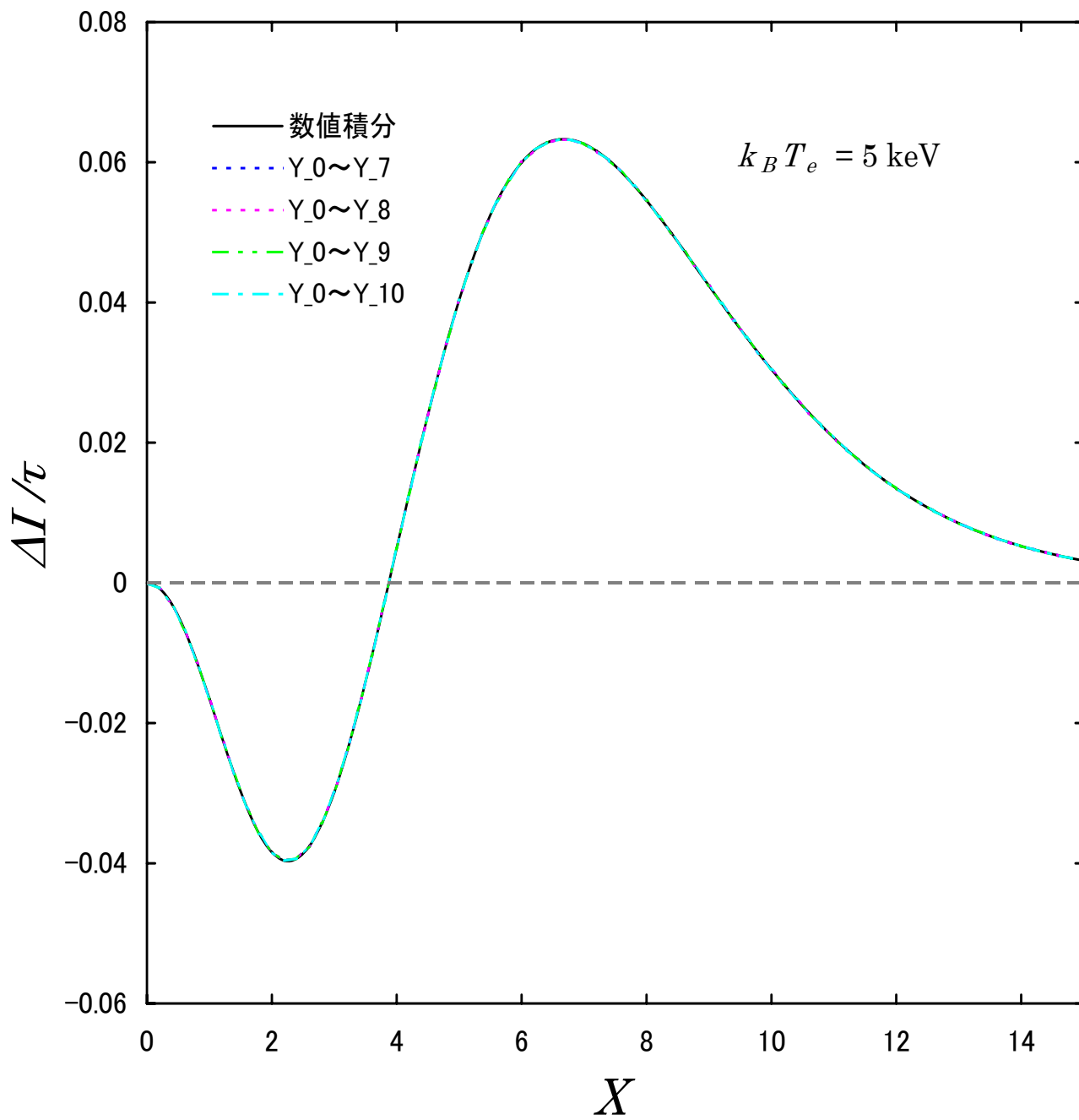


図 2.14: 5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

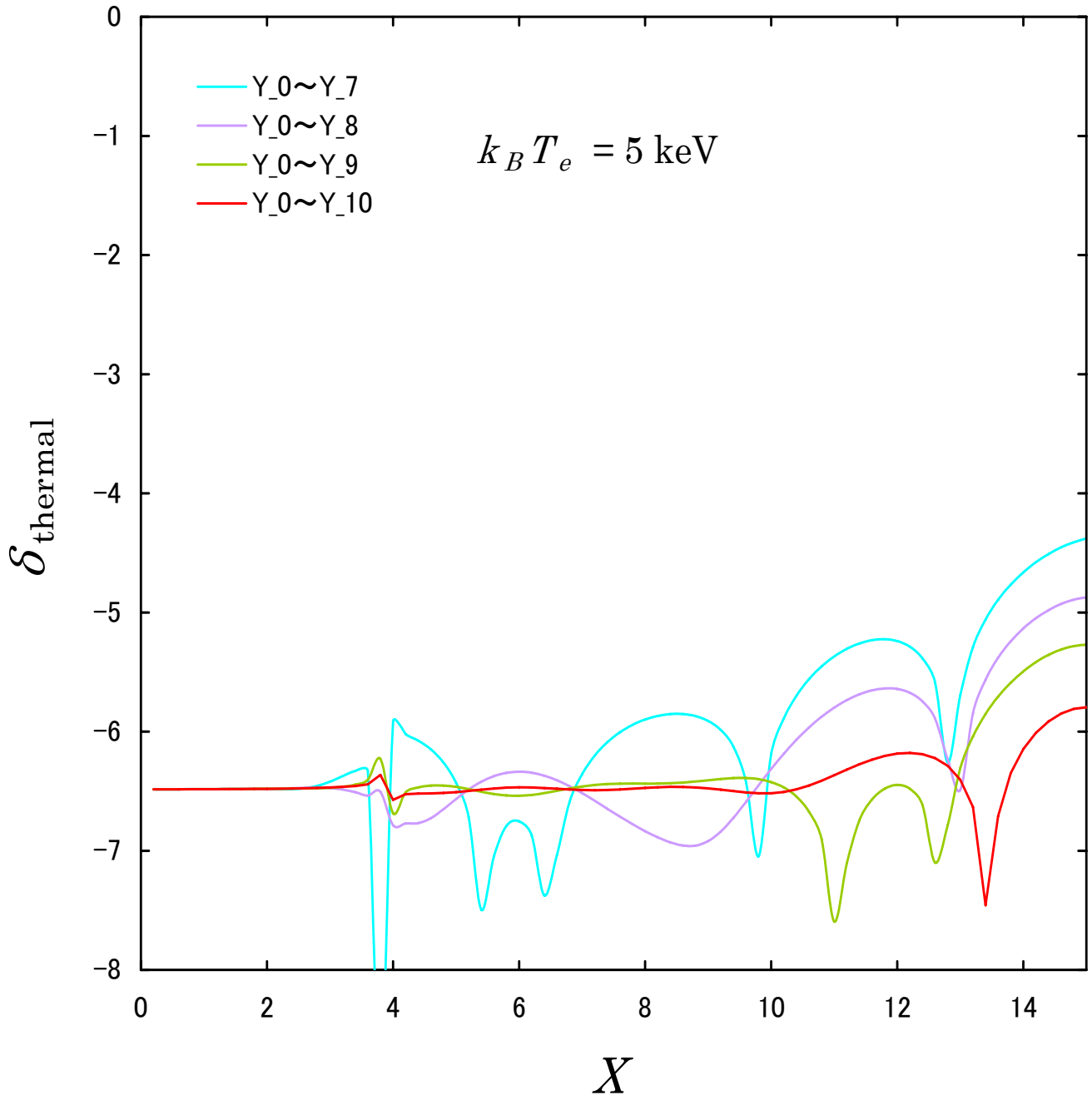


図 2.15: 5 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

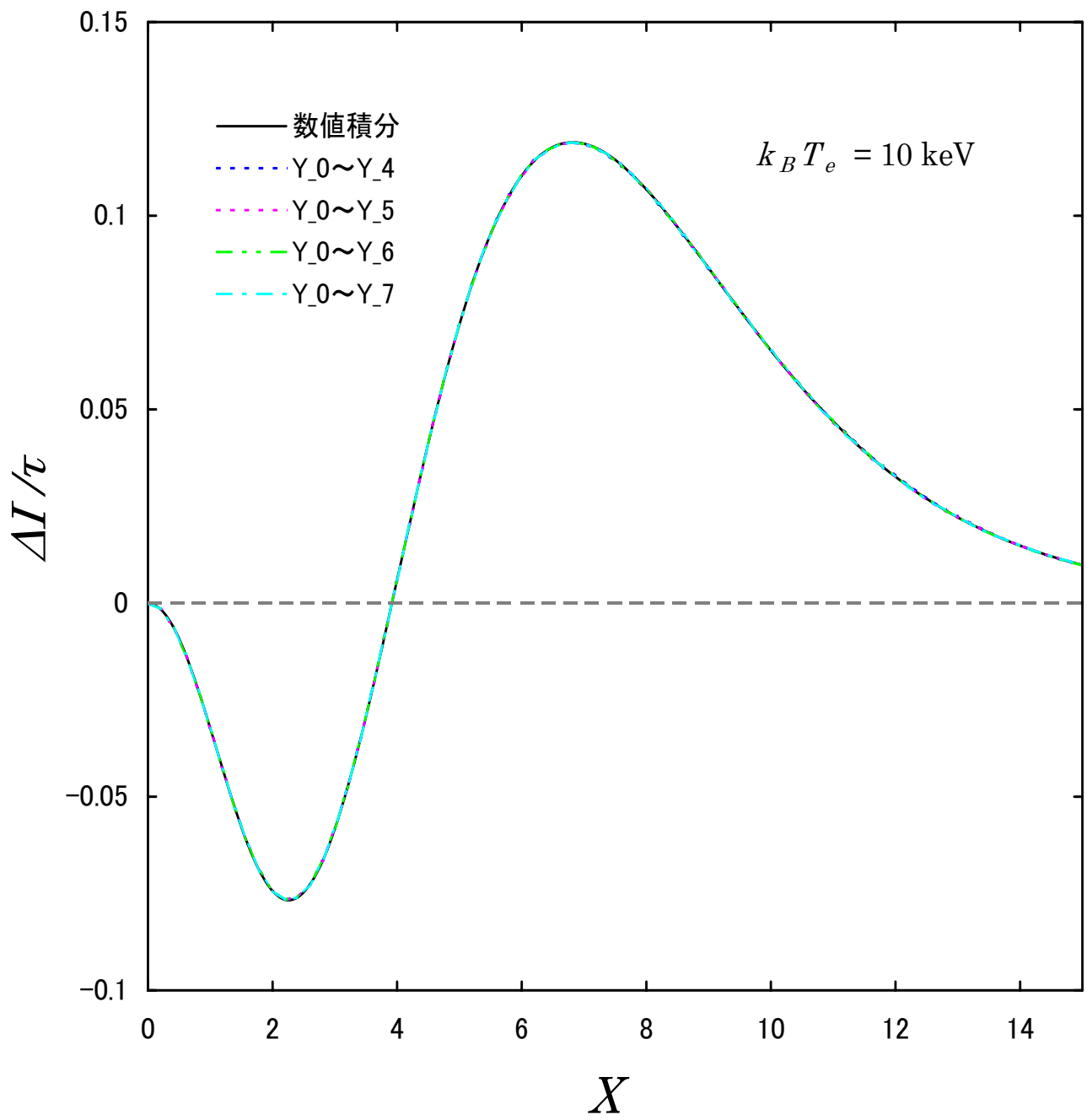


図 2.16: 10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。



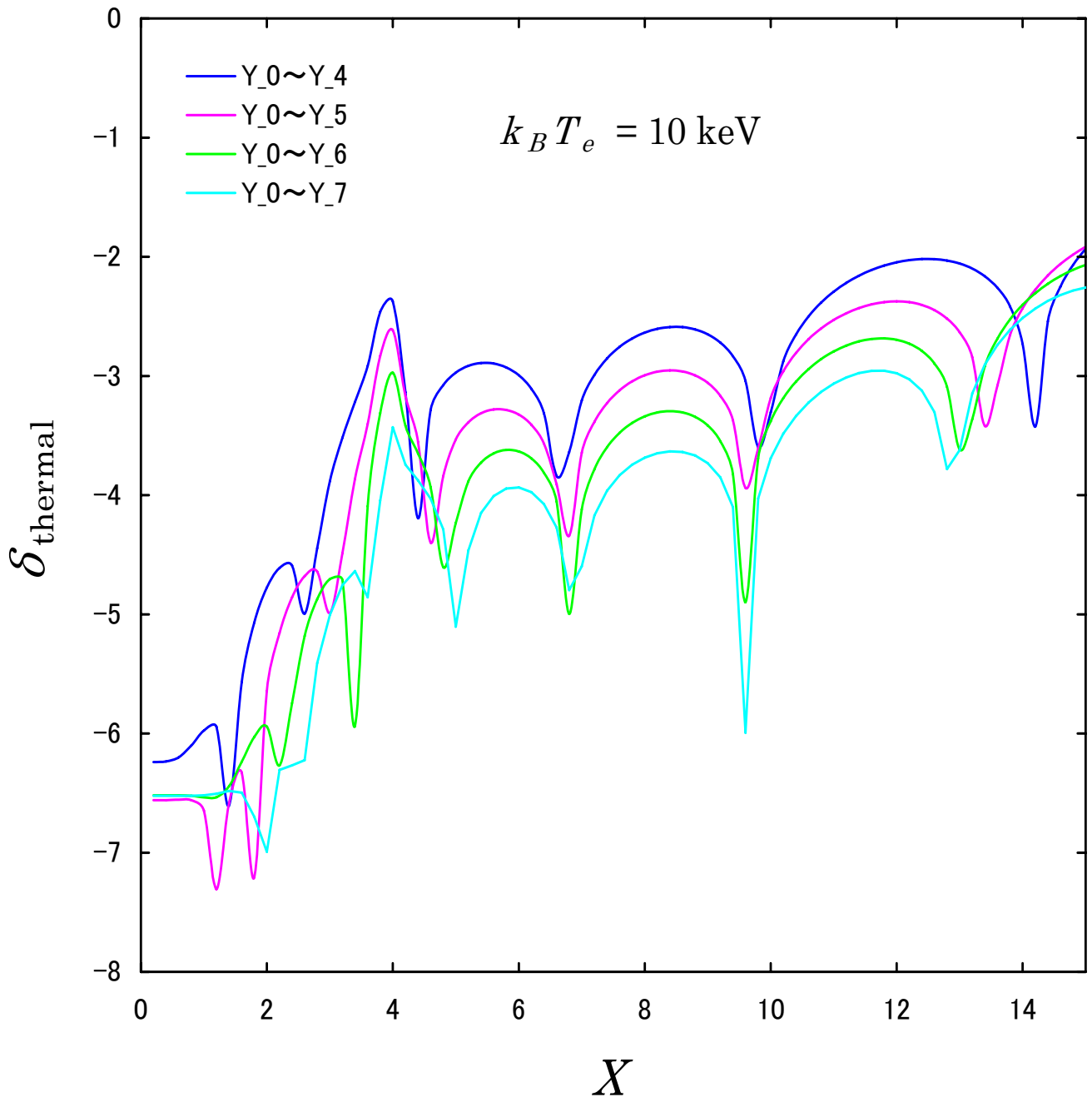


図 2.17: 10 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

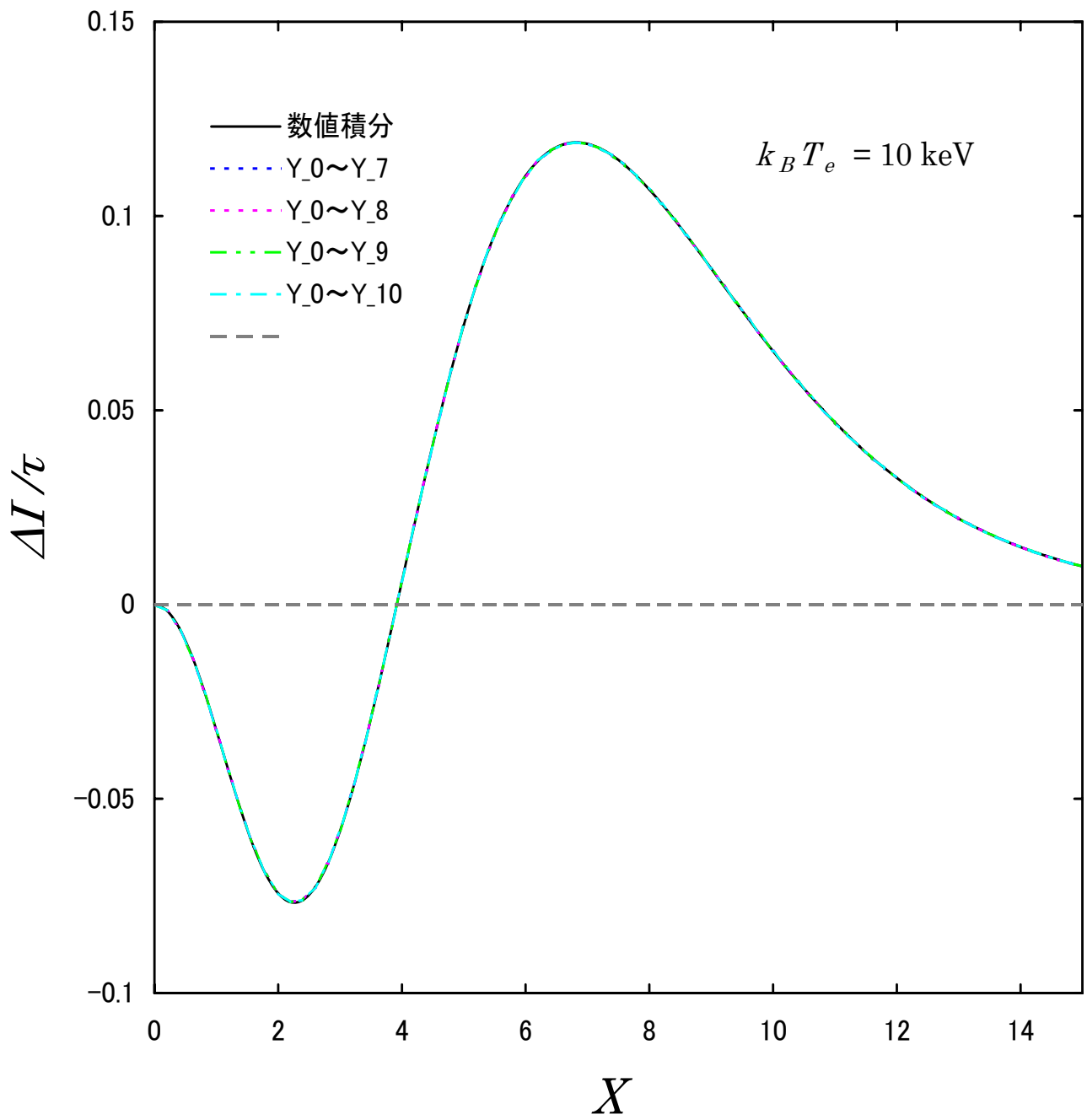


図 2.18: 10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

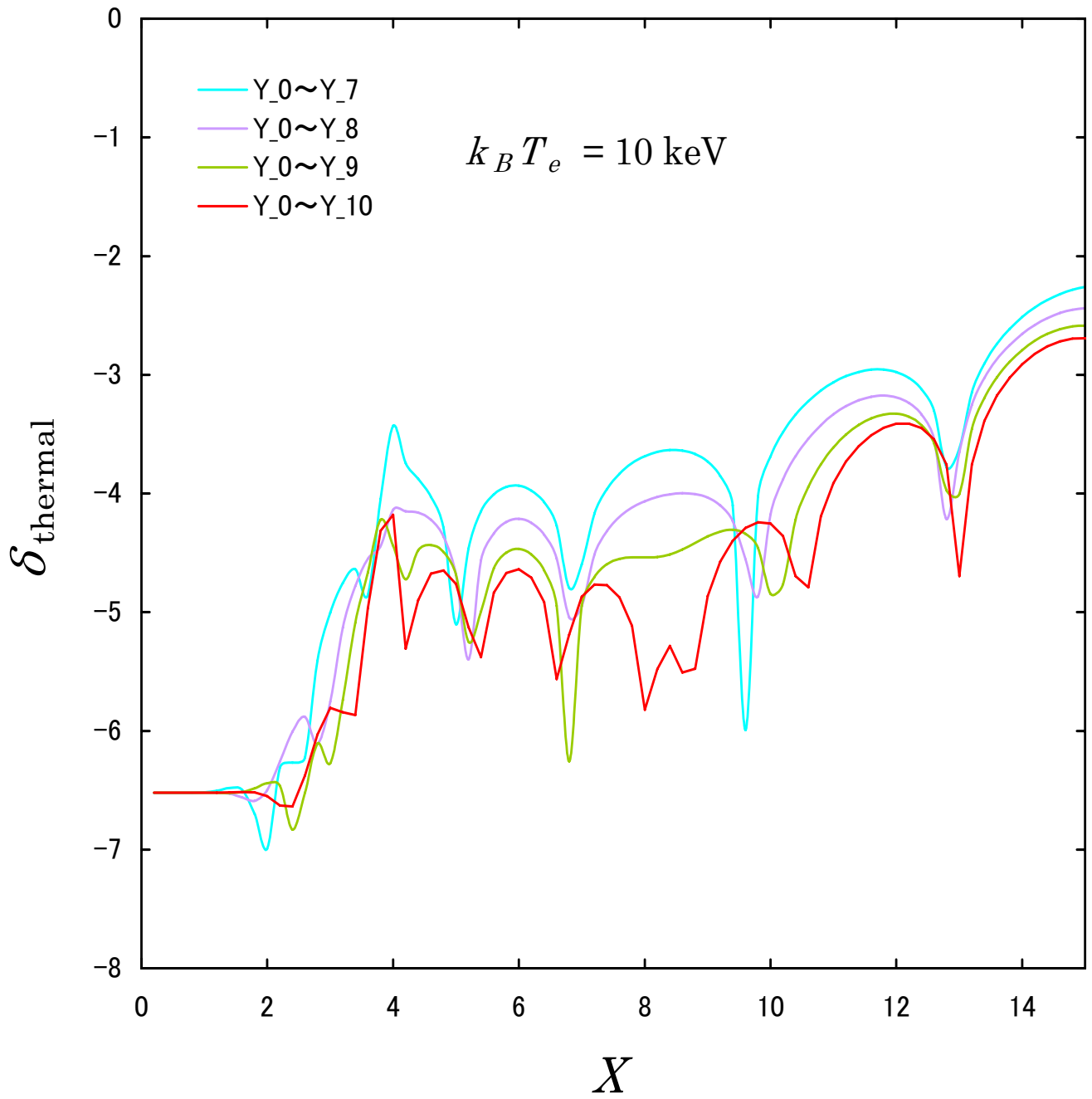


図 2.19: 10 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

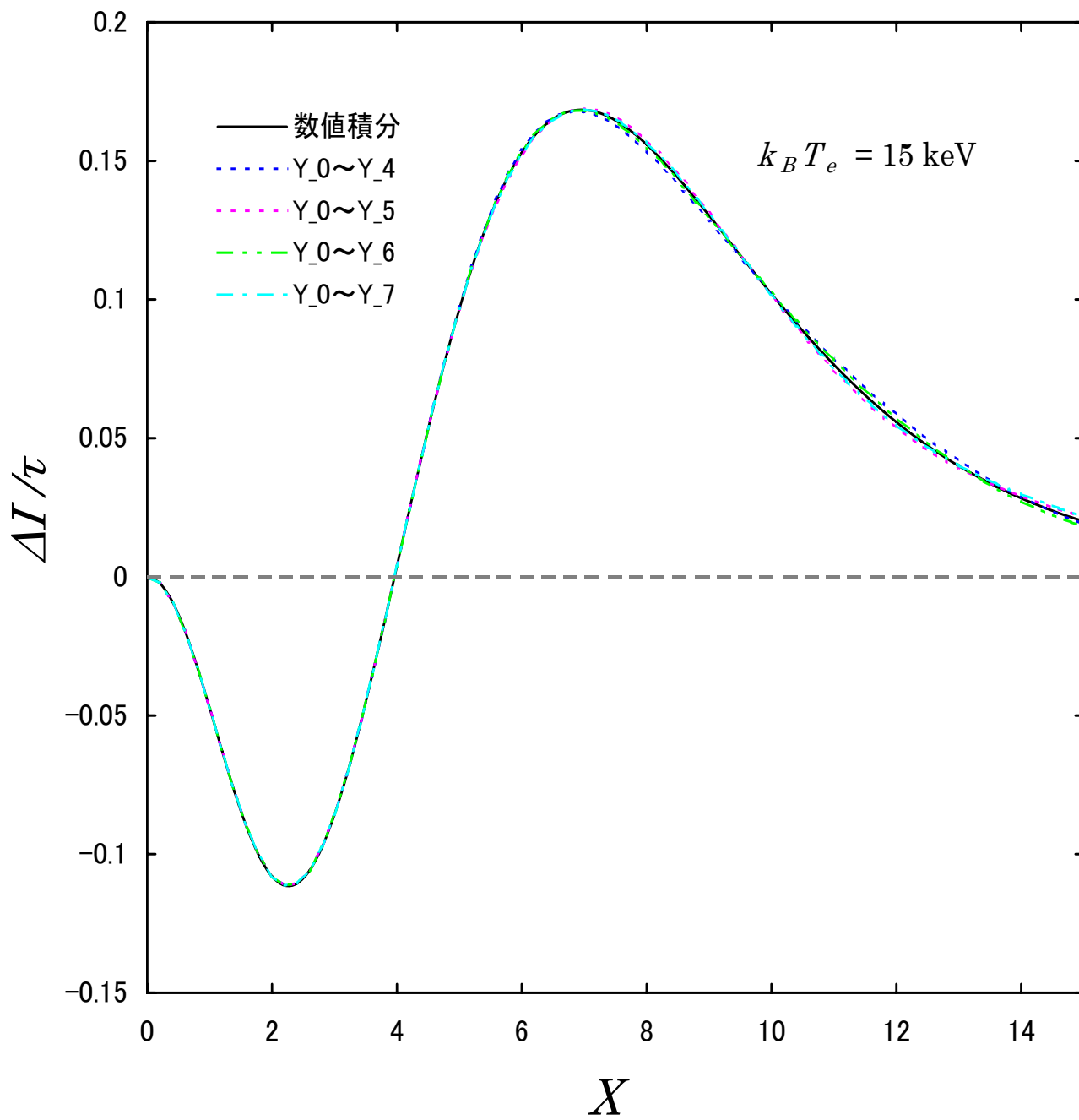


図 2.20: 15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

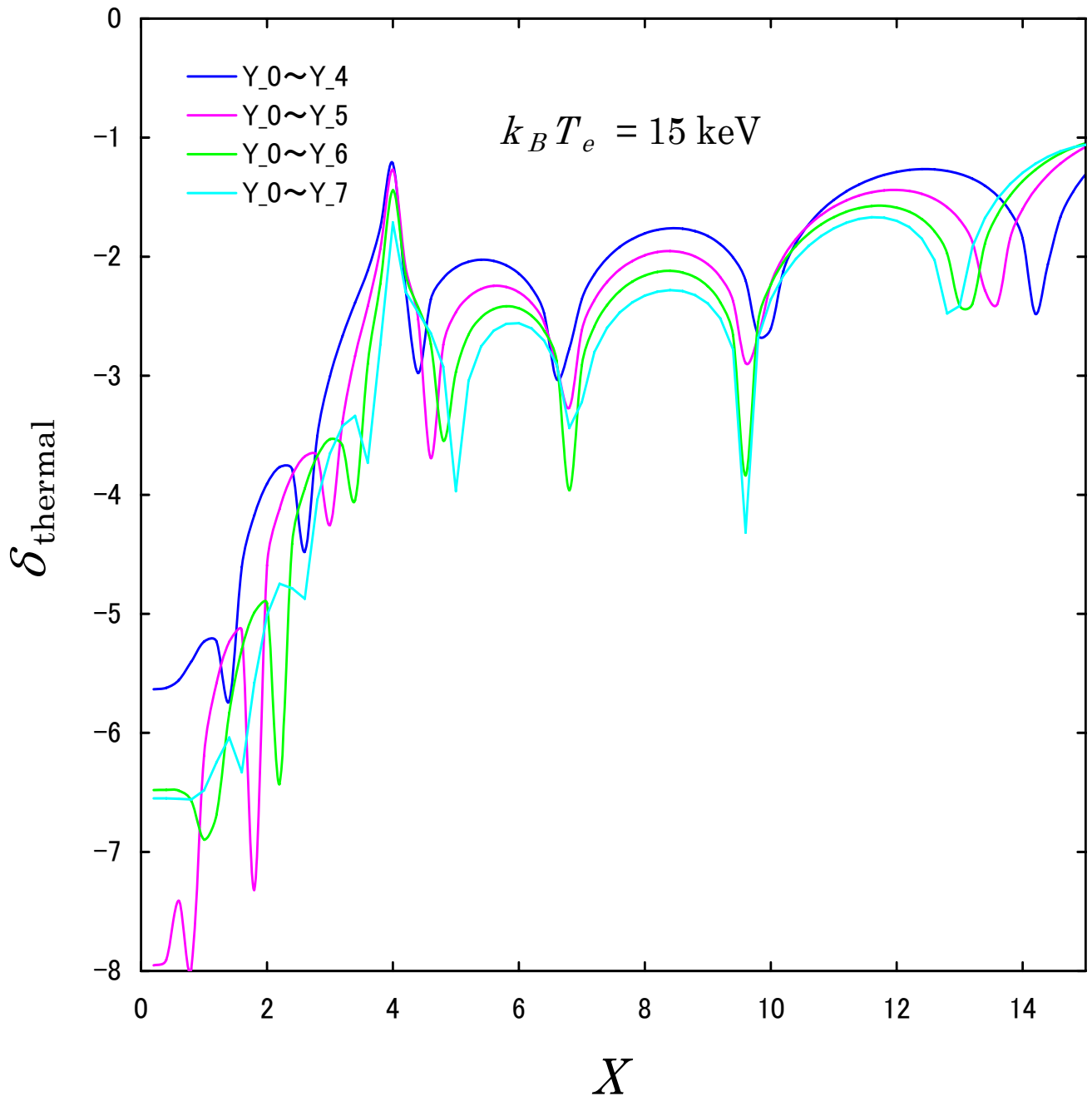


図 2.21: 15 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0 \sim Y_4$ 、 $Y_0 \sim Y_5$ 、 $Y_0 \sim Y_6$ 、 $Y_0 \sim Y_7$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

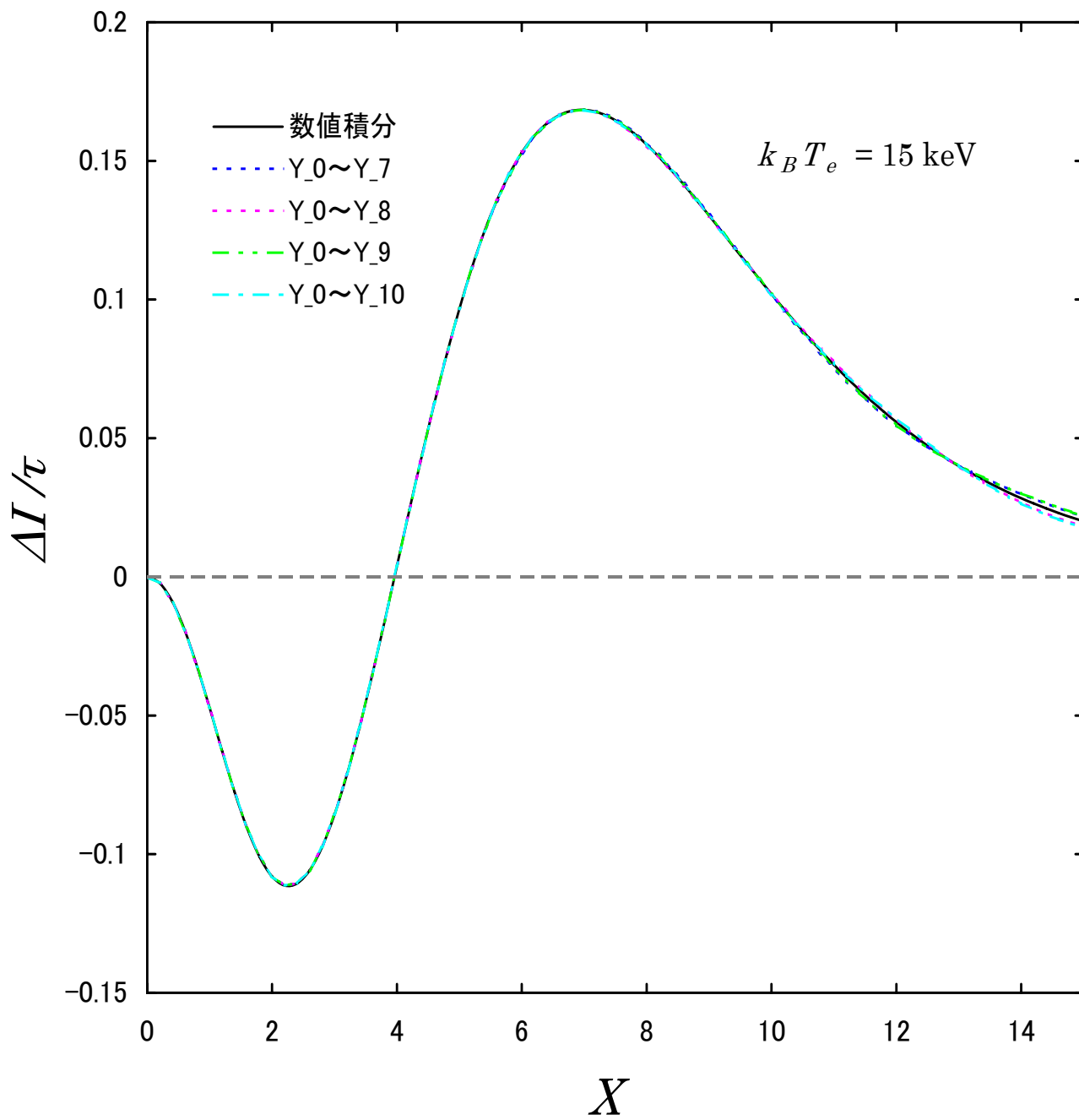


図 2.22: 15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

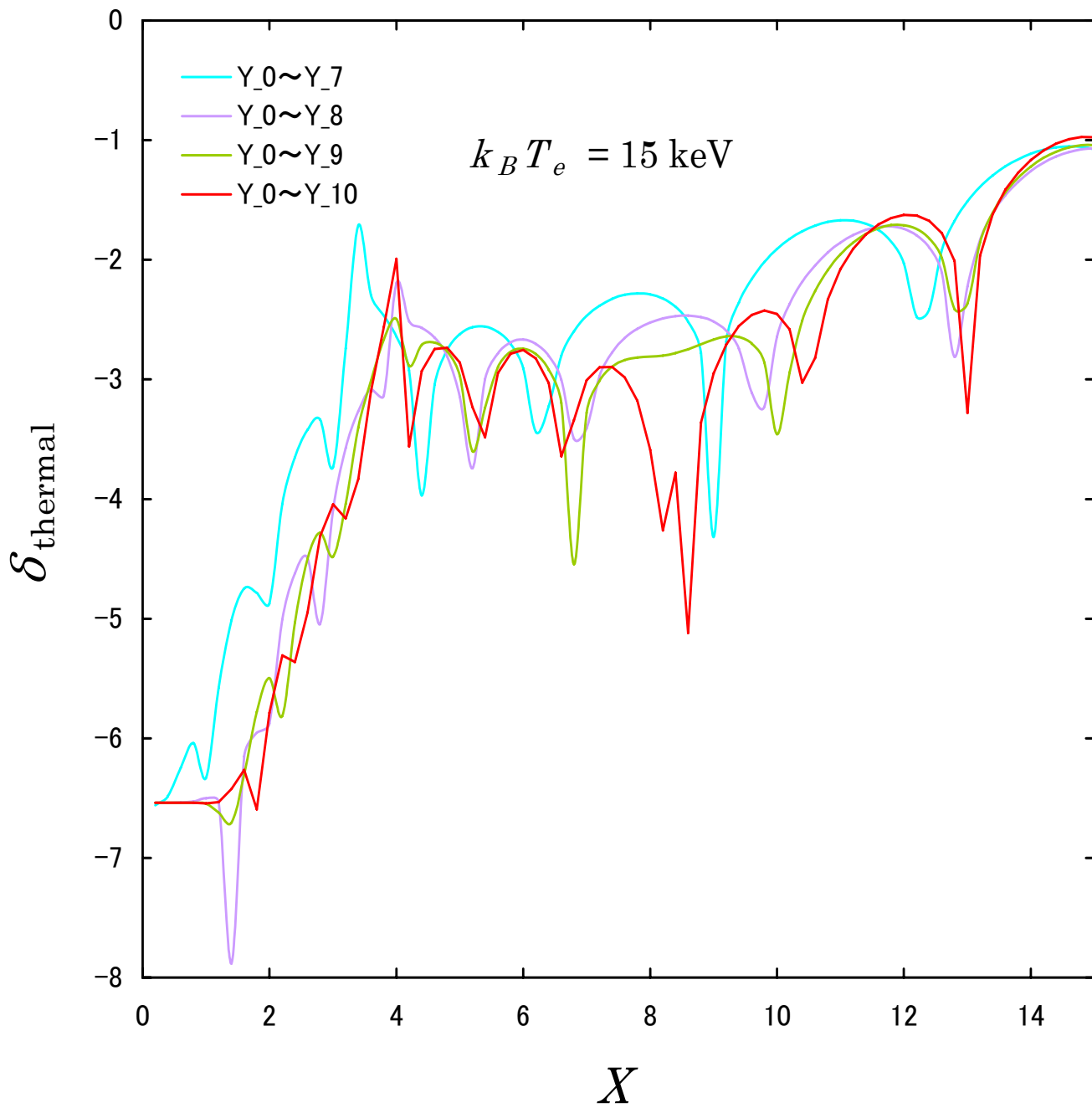


図 2.23: 15 keV の場合で、数値積分に対する、 $Y_0 \sim Y_7$ 、 $Y_0 \sim Y_8$ 、 $Y_0 \sim Y_9$ 、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

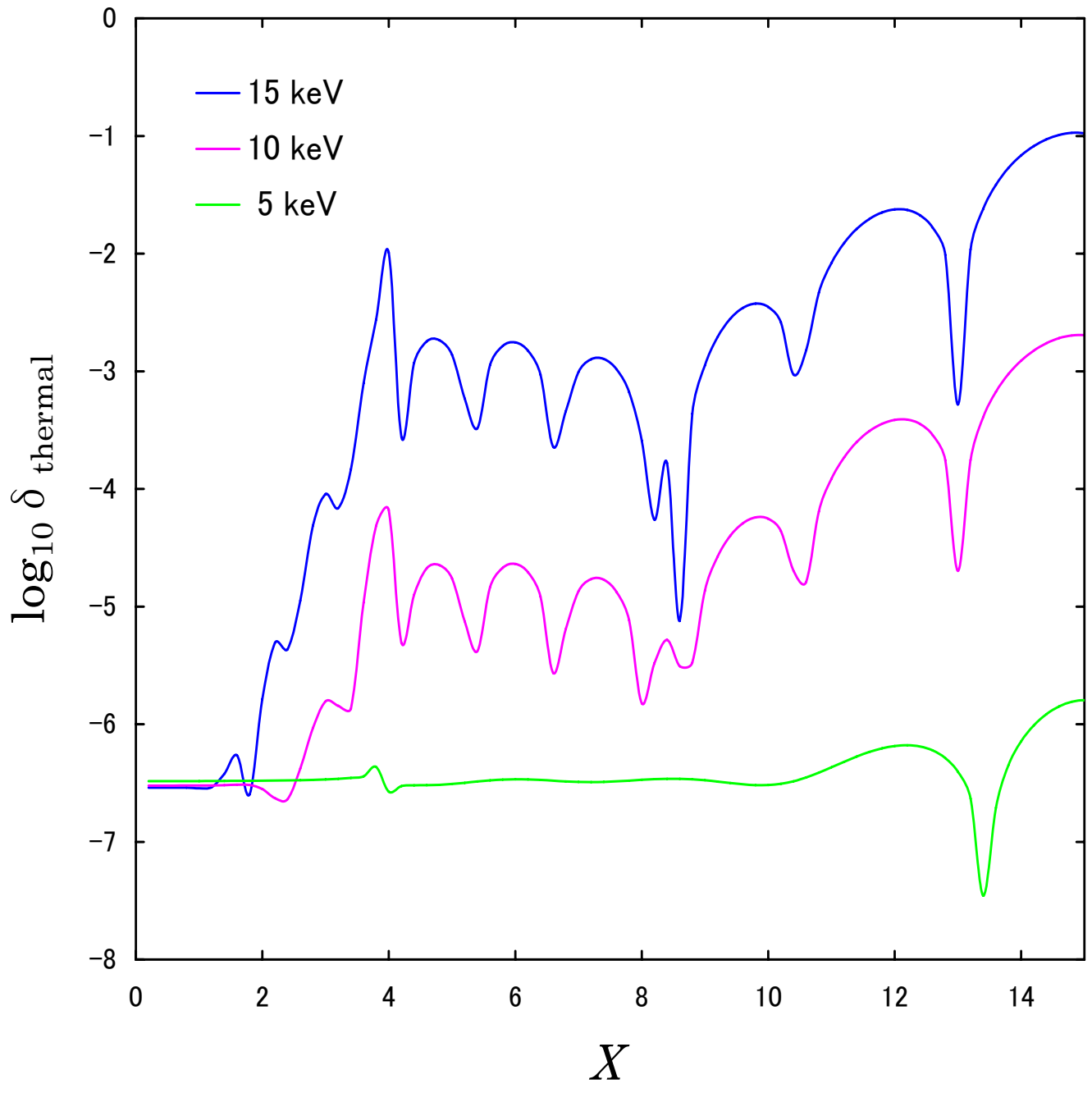


図 2.24:  $Y_0 \sim Y_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の数値積分に対する相対誤差を、銀河団温度 5 keV、10 keV、15 keV の場合で重ね合わせた結果。



## 2.4.2 展開式の各項

最後に、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式：

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \theta_e [Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \theta_e^6 Y_6 + \theta_e^7 Y_7 + \theta_e^8 Y_8 + \theta_e^9 Y_9 + \theta_e^{10} Y_{10}]$$

の各項をグラフに表わした。もちろんグラフの値は、

$$\frac{\Delta I}{\tau} = \frac{X^4 e^X}{(e^X - 1)^2} \theta_e [Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \theta_e^6 Y_6 + \theta_e^7 Y_7 + \theta_e^8 Y_8 + \theta_e^9 Y_9 + \theta_e^{10} Y_{10}]$$

により定義されるスペクトル強度変化に変換した値である。そして次のように式を定義することにする。

$$\frac{\Delta I}{\tau} (Y_i) \equiv \frac{X^4 e^X}{(e^X - 1)^2} \times [\theta_e^i Y_i] \quad (0 \leq i \leq 10) \quad (2.59)$$

それぞれのグラフは、p.80以降に載せてある。

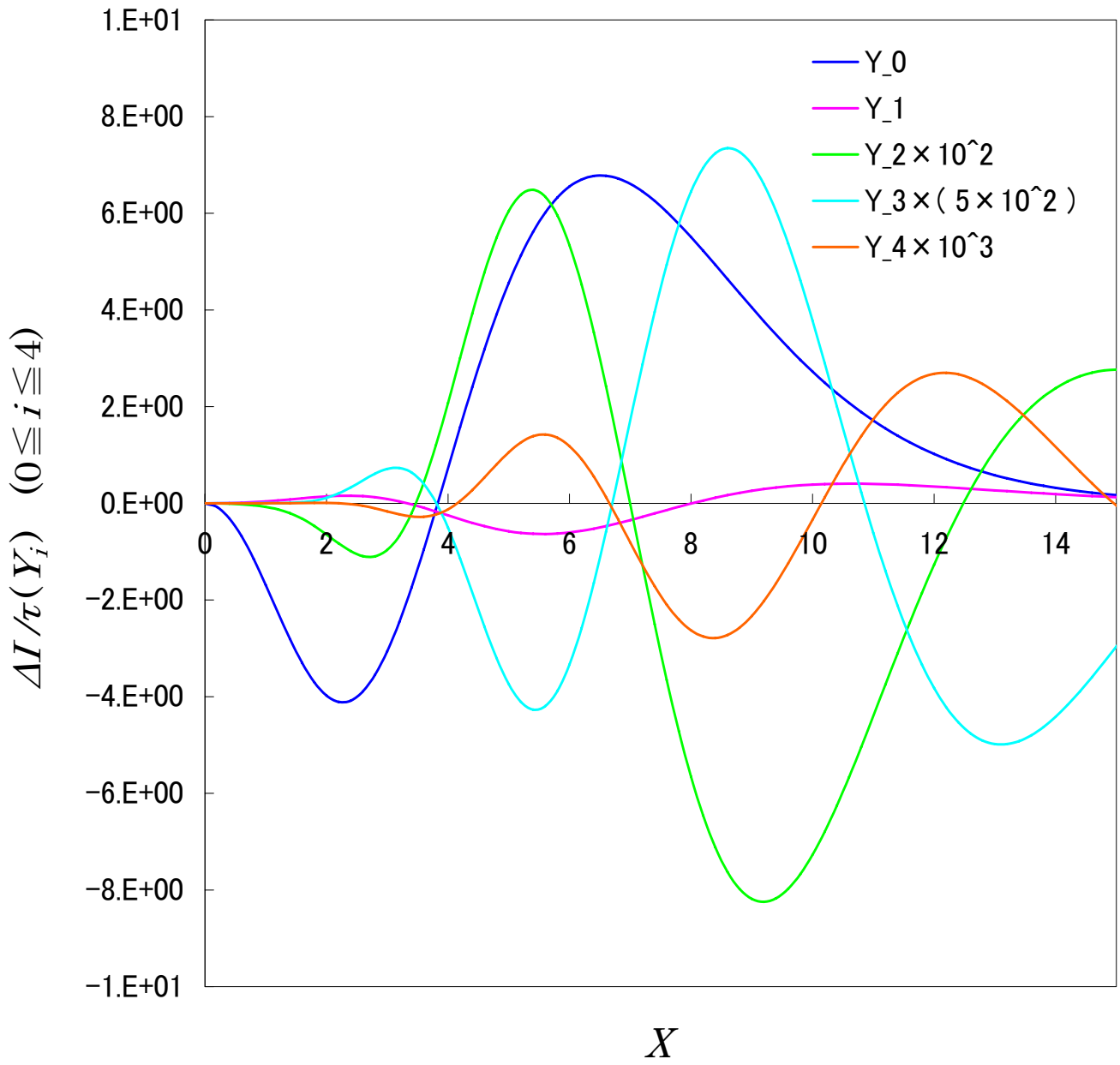


図 2.25:  $\Delta I/\tau(Y_i)$  の各項の縮尺を変えて表示したグラフ。 ( $0 \leq i \leq 4$ )

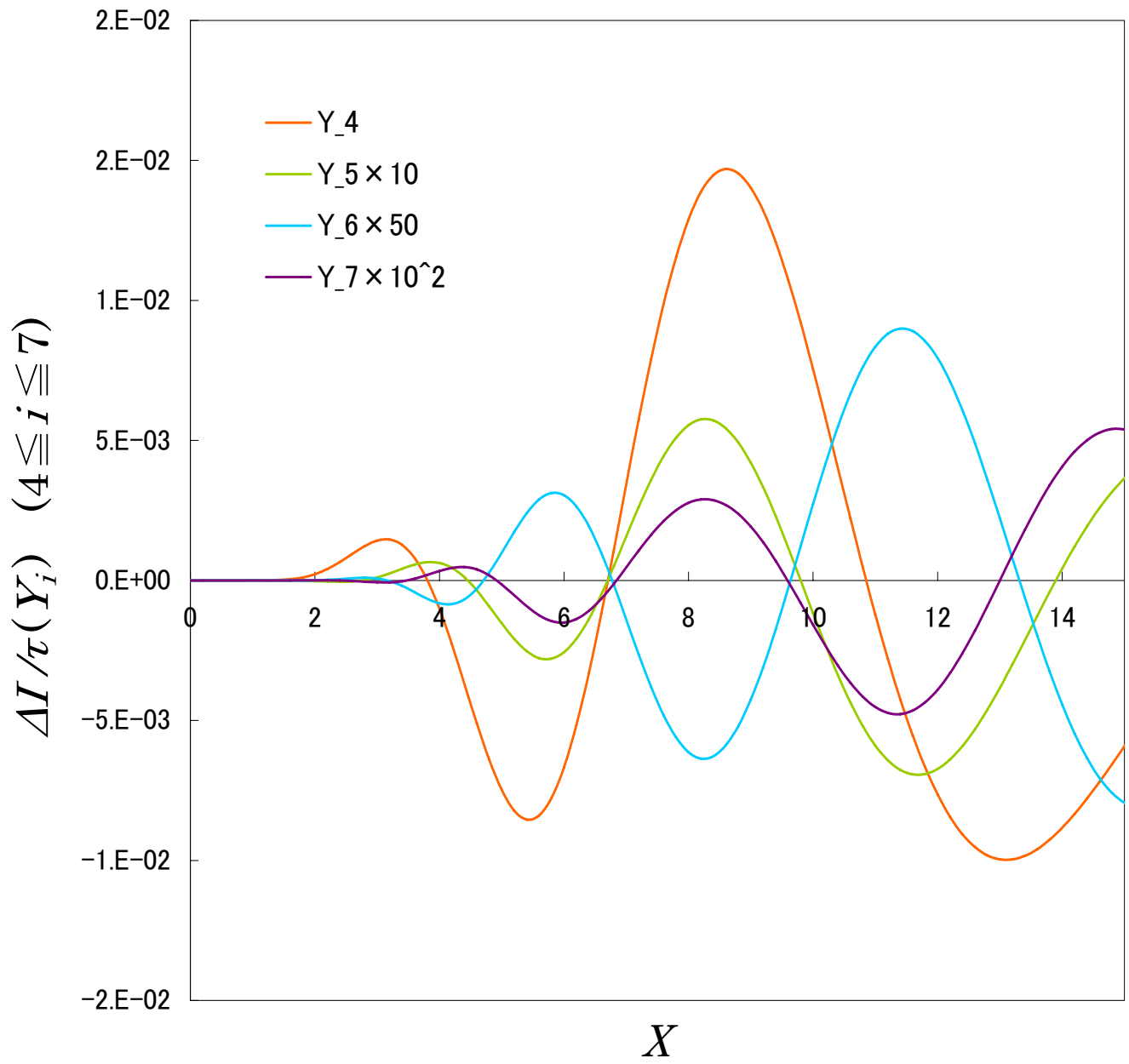


図 2.26:  $\Delta I / \tau(Y_i)$  の各項の縮尺を変えて表示したグラフ。 ( $4 \leq i \leq 7$ )

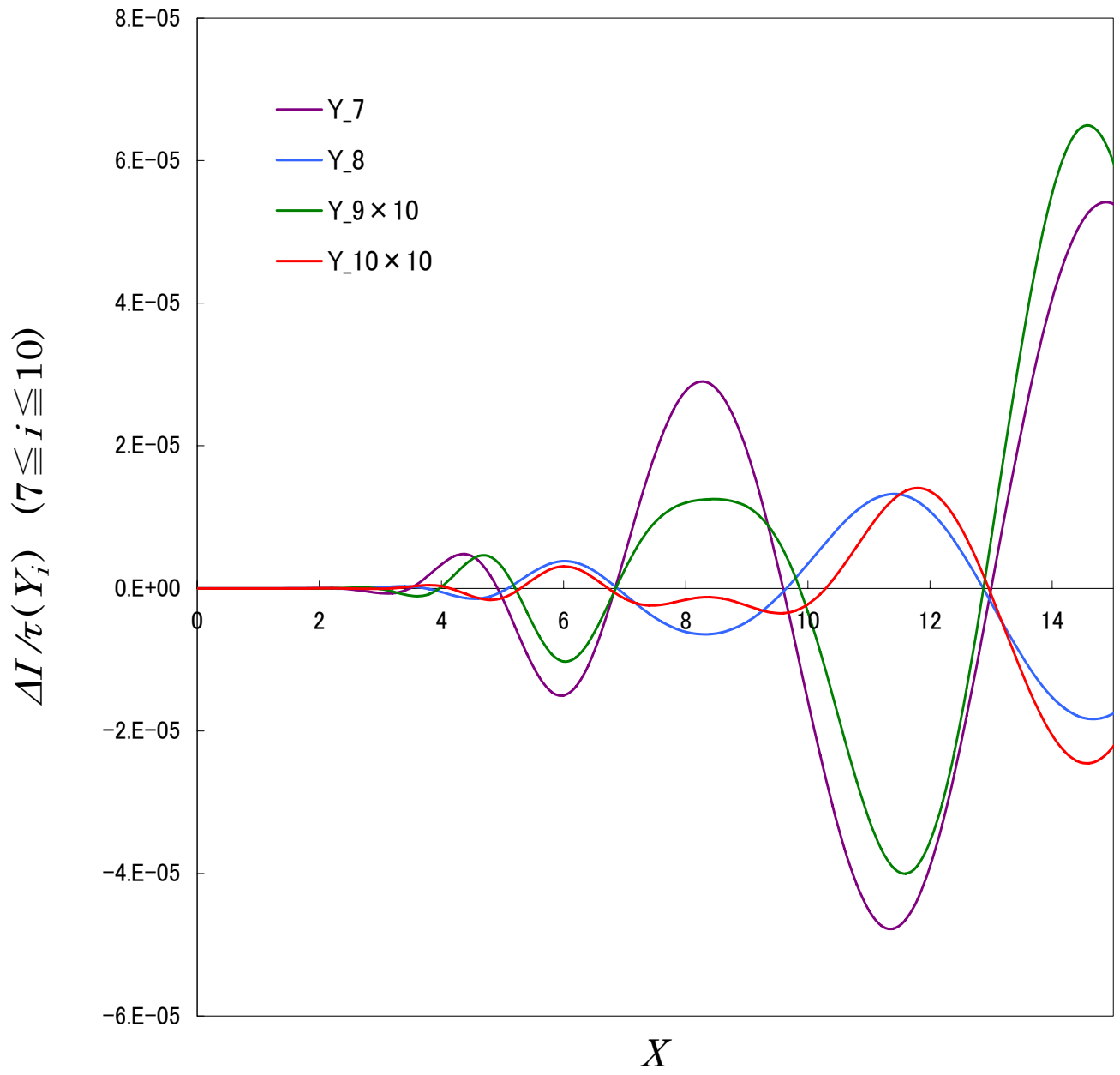


図 2.27:  $\Delta I/\tau(Y_i)$  の各項の縮尺を変えて表示したグラフ。 ( $7 \leq i \leq 10$ )

## 2.5 多重散乱を考慮した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

### 2.5.1 ボルツマン方程式の展開

さて、今までは、銀河団中で光子が1回だけ散乱される場合を考えてきたが、入射光子が銀河団中で2回散乱される場合は、どのような振る舞いをするのかを調べることにした。計算には、1回散乱成分の結果が必要である。我々は、 $Y_{10}$  までの補正項を入れた1回散乱の熱的スニャエフゼルドビッチ効果の結果を用いて調べることにした。1回散乱された時のゆがみの効果は、p.63の(2.57)式：

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\tau \theta_e X e^X}{e^X - 1} [Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \theta_e^6 Y_6 + \theta_e^7 Y_7 + \theta_e^8 Y_8 + \theta_e^9 Y_9 + \theta_e^{10} Y_{10}]$$

で表される。これを摂動的なゆがみの効果として元々のボルツマン方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \\ &\times \{n(\omega)[1+n(\omega')] - n(\omega')[1+n(\omega)]e^{\Delta x}\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

の分布関数  $n(\omega)$  に代入して、

$$\begin{aligned} n(X) &\equiv n_0(X) + \Delta n(X) \\ &= n_0(X) \left\{ 1 + \frac{\Delta n(X)}{n_0(X)} \right\} \end{aligned} \quad (2.61)$$

と表現する。そして、(2.60)式を展開し、銀河団を通過する時間で積分する。その結果を宇宙背景放射の初期分布  $n_0$  で規格化して相対的な分布変化を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{n_0} &= \frac{\tau \theta_e X e^X}{e^X - 1} [Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \theta_e^6 Y_6 + \theta_e^7 Y_7 + \theta_e^8 Y_8 + \theta_e^9 Y_9 + \theta_e^{10} Y_{10}] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\tau^2 \theta_e^2 X e^X}{e^X - 1} [Z_0 + \theta_e Z_1 + \theta_e^2 Z_2 + \theta_e^3 Z_3 + \theta_e^4 Z_4 + \theta_e^5 Z_5 + \theta_e^6 Z_6 + \theta_e^7 Z_7 + \theta_e^8 Z_8 + \theta_e^9 Z_9 + \theta_e^{10} Z_{10}] \end{aligned} \quad (2.62)$$

という形式にまとめられる。この(2.62)式は1回散乱の項と2回散乱の項の足し合わせになっており、 $Z_n$  で表されている後ろの項が、2回散乱の効果を表す部分になる。また、実際に観測で得られる量は、その二つの項が足し合わさった合計の量である。因みに、2001年の伊藤、川名、野澤、神山 [43] による計算では、 $Y_6$  までの1回散乱の補正項を用いて、 $Z_6$  までの2回散乱成分の補正項が計算されている。2回散乱成分の  $Z_0 \sim Z_{10}$  までの計算結果については、B.3に掲載されている。

さて、2回散乱の係数部分に現れる  $\frac{1}{2}\tau^2$  の項であるが、これは、

$$\sigma_T \int_0^l dl N_e(l_1) \times \sigma_T \int_0^{l_1} dl_2 N_e(l_2) = \frac{1}{2} \left[ \sigma_T \int_0^l dl_1 N_e(l_1) \right]^2 \quad (2.63)$$

の関係を用了。その計算については、B.1の(B.18)式から(B.24)式までの計算の流れを参照していただきたい。ここまでが、2回散乱の展開式である。

一方、2回散乱の数値積分は、時間発展方程式 (2.60) 式にゆがみを考慮した分布関数 (2.61) 式を代入する。その結果、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = & -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \{ n_0(\omega)[1 + n_0(\omega')] - n_0(\omega')[1 + n_0(\omega)]e^{\Delta x} \} \\ & -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \left\{ n_0(\omega') \frac{\Delta n(\omega')}{n_0(\omega')} [n_0(\omega)(1 - e^{\Delta x}) - e^{\Delta x}] \right. \\ & \left. + n_0(\omega) \frac{\Delta n(\omega)}{n_0(\omega)} [1 + n_0(\omega')(1 - e^{\Delta x})] \right\} \end{aligned} \quad (2.64)$$

のように整理できる。この式を数値積分していく。ここで、(2.64) 式の二項目部分：

$$\begin{aligned} -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \left\{ n_0(\omega') \frac{\Delta n(\omega')}{n_0(\omega')} [n_0(\omega)(1 - e^{\Delta x}) - e^{\Delta x}] \right. \\ \left. + n_0(\omega) \frac{\Delta n(\omega)}{n_0(\omega)} [1 + n_0(\omega')(1 - e^{\Delta x})] \right\} \end{aligned}$$

が2回散乱成分に対応している。

さて、2回散乱を考える上でも、散乱前後での光子数が変化しない事が重要になってくるが、

$$\int dX X^2 \Delta n(X) \quad (2.65)$$

を用いて光子数の変化を求めると、数値積分による結果および展開式が  $0(10^{-9})$  になることがわかる。また、展開式は解析的にも0になる事が確認できる。さて、ここで、実際に観測されるのは強度変化であるので、1回散乱のときと同様に、プランクの黒体輻射の式より、

$$\Delta I \equiv \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n(X)}{n_0(X)} \quad (2.66)$$

という計算から強度変化を求める。

これを、観測によって決まる量である光学的深さ  $\tau$  の2乗で割って  $\Delta I/\tau^2$  を熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を表わす量と定義し、それを用いてグラフの比較等の操作を行っていく。なお、1回散乱成分と2回散乱成分を区別するため、1回散乱成分を  $\Delta I_1/\tau$ 、2回散乱成分を  $\Delta I_2/\tau^2$  とする。

## 2.5.2 2回散乱成分の特性

展開の精度を確かめる前に、数値積分を用いて、2回散乱の特性について調べてみる。

まず、2回散乱のグラフの形状を  $k_B T_e = 10 \text{ keV}$  の場合で示したグラフが、図 2.28 である。2回散乱成分のグラフは、横軸と交差する部分、すなわち、ゼロ点が二箇所存在することが分かる。また、2回散乱成分の温度依存性を図 2.29 から調べてみると、1回散乱成分と同様に、銀河団の温度が高くなると振幅が大きくなり、効果が強くなっていく性質を示していることが分かる。次に、1回散乱成分と比較したグラフを図 2.30 に示す。高周波数側を除く部分で、1回散乱成分に対して反対側に振幅が表れている。これらは、1次摂動 (1回散乱成分に対応) に対する2次摂動 (2回散乱成分に対応) の特徴である。



## 2.5.4 相対論的補正の重要性

展開式の話に移る前に、この厳密解を用いて相対論的補正の必要性を確認してみる。すなわち、相対論的に計算した結果と非相対論的に計算した結果の比較を行う。 $\Delta I_2/\tau^2$  で比較した結果を図 2.34 に示し、両者の相対誤差を、

$$\delta \equiv \left| \frac{\Delta I_{\text{Relativistic}} - \Delta I_{\text{Non-Relativistic}}}{\Delta I_{\text{Non-Relativistic}}} \right| \quad (2.72)$$

と定義して計算した結果を図 2.35 に示す。これらを見れば、相対論的効果が無視出来ないことが分かる。特に、高周波側では、相対論的補正による差が顕著に出ていることが分かる。また、銀河団が高温になるにつれて、全体的に相対論的補正の寄与が大きくなっていることが分かる。例えば、図 2.35 から、銀河団の温度が 15 keV の場合は、周波数の無次元量  $X \simeq 15$  ( $\nu \simeq 853$  GHz) では誤差  $\delta \sim 3$  である。すなわち、その場所では、相対論的計算結果は非相対論的計算結果の約 4 倍であることが分かる。因みに、クロスオーバー周波数付近では、誤差曲線にピークが表れているが、これは、その周波数付近で、熱的スニャエフゼルドビッチ効果のゼロ点があるからである。

## 2.5.5 展開式の精度

比較計算及び比較する範囲

展開式の性質を調べるために、銀河団の温度、周波数、展開次数などの計算条件を変えて、数値積分の結果と展開計算の結果を比較し、精度を評価した。銀河団の温度については、 $5 \leq k_B T_e \leq 15$  keV の範囲である。周波数範囲は、2 回散乱成分の値が比較的高周波数まで値を持っているため、 $0 \leq X \leq 20$  の周波数範囲で議論していくことにする。

また、比較には、数値積分との相対誤差：

$$\delta_{\text{thermal}} \equiv \left| \frac{(\Delta I)_{\text{analytic}} - (\Delta I)_{\text{numerical}}}{(\Delta I)_{\text{numerical}}} \right| \quad (2.73)$$

を定義して計算する。

展開次数による精度の動き

展開次数を増やしていくとどのようになるかを、銀河団の温度ごとに調べるが、比較する曲線が多くなるので、次のように 3 つの回グラフに分けて示すことにする。

2 回散乱成分の展開次数と精度の動き、展開式の精度評価で用いるグラフは、 $Z_0$ 、 $Z_0 + Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$  までの項を取り入れた展開式、 $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$  までの項を取り入れた展開式、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$  までの項を取り入れた展開式という形式で展開次数範囲を 3 つに分けて表示することにする。

銀河団温度 5keV

数値積分のグラフと  $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.36 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.73) 式の計算結果を図 2.37



に示す。数値積分のグラフと  $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.38 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.73) 式の計算結果を図 2.39 に示す。数値積分のグラフと  $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.40 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.73) 式の計算結果を図 2.41 に示す。これらグラフから、次のような考察ができる。

展開次数を増やしていくと、低周波数極限付近は  $10^{-4}$  未満という高い精度まで収束している。2 回散乱成分の曲線に 2 箇所存在する軸との交差点では、1 回散乱のクロスオーバー周波数での誤差と同じ理由で、誤差曲線のピークができています。

誤差曲線のピーク部分を除けば、展開次数を増やしていくと、 $0 \leq X \leq 15$  の領域全体で精度が向上している。 $Z_7$  以上の項を含めた展開計算では、 $X < \sim 20$  ( $\nu < \sim 1137\text{GHz}$ ) の領域で、誤差が 1% 以内に収まっている。

#### 銀河団温度 10keV

数値積分のグラフと  $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.42 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.73) 式の計算結果を図 2.43 に示す。数値積分のグラフと  $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.44 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.73) 式の計算結果を図 2.45 に示す。数値積分のグラフと  $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.46 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.73) 式の計算結果を図 2.47 に示す。これらグラフから、次のような考察ができる。

展開次数を増やしていくと、低周波数極限付近は  $10^{-4}$  未満という高い精度まで収束している。高周波数側では、展開次数を増やしても精度がそれほど向上せず、逆に精度が悪くなっている部分も存在する。誤差が 1% 以内に収まっている領域は、 $X < \sim 2.5$  である。

#### 銀河団温度 15keV

数値積分のグラフと  $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.48 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.73) 式の計算結果を図 2.49 に示す。数値積分のグラフと  $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.50 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.73) 式の計算結果を図 2.51 に示す。数値積分のグラフと  $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$  までの項を取り入れた展開計算のグラフを重ねた結果を図 2.52 に示す。数値積分に対するそれぞれの展開式の相対誤差 (2.73) 式の計算結果を図 2.53 に示す。これらグラフから、次のような考察ができる。

展開次数を増やしていくと、低周波数極限付近は  $10^{-4}$  未満という高い精度まで収束している。高周波数側では、10keV の場合と同様に、展開次数を増やしても精度がそれほど向上せず、逆に精度が悪くなっている部分も存在する。誤差が 1% 以内に収まっている領域は、 $X < \sim 2.5$  である。

#### 比較結果のまとめ

このような結果から、銀河団の温度が低温の場合は、 $X < \sim 20$  ( $\nu < \sim 1137\text{GHz}$ ) の領域全体で精度が良く、より高次の項まで含めた方が、高精度の数値結果が得られた。

一方、銀河団の温度が高温の場合は、 $X < \sim 2.5$  ( $\nu < \sim 142\text{GHz}$ ) の領域では、誤差が 1% 以内に収まったが、それより高周波数側では精度が悪く、さらに高次の項を含めても精度が向上しないか、あるいは、逆に精度が悪化するという結果が得られた。しかも、10keV と 15keV の精度を比較してみると、15keV の方、すなわち、より高温の場合の方が、精度自体が悪いばかりでなく、精度の悪化の仕方も激しいという様子が見られた。

これらの解析から、結果として、展開式の精度としては有効とは言えない精度であるが、そもそも、2回散乱の寄与は大変小さく、無視しても差し支えないと考えられる。

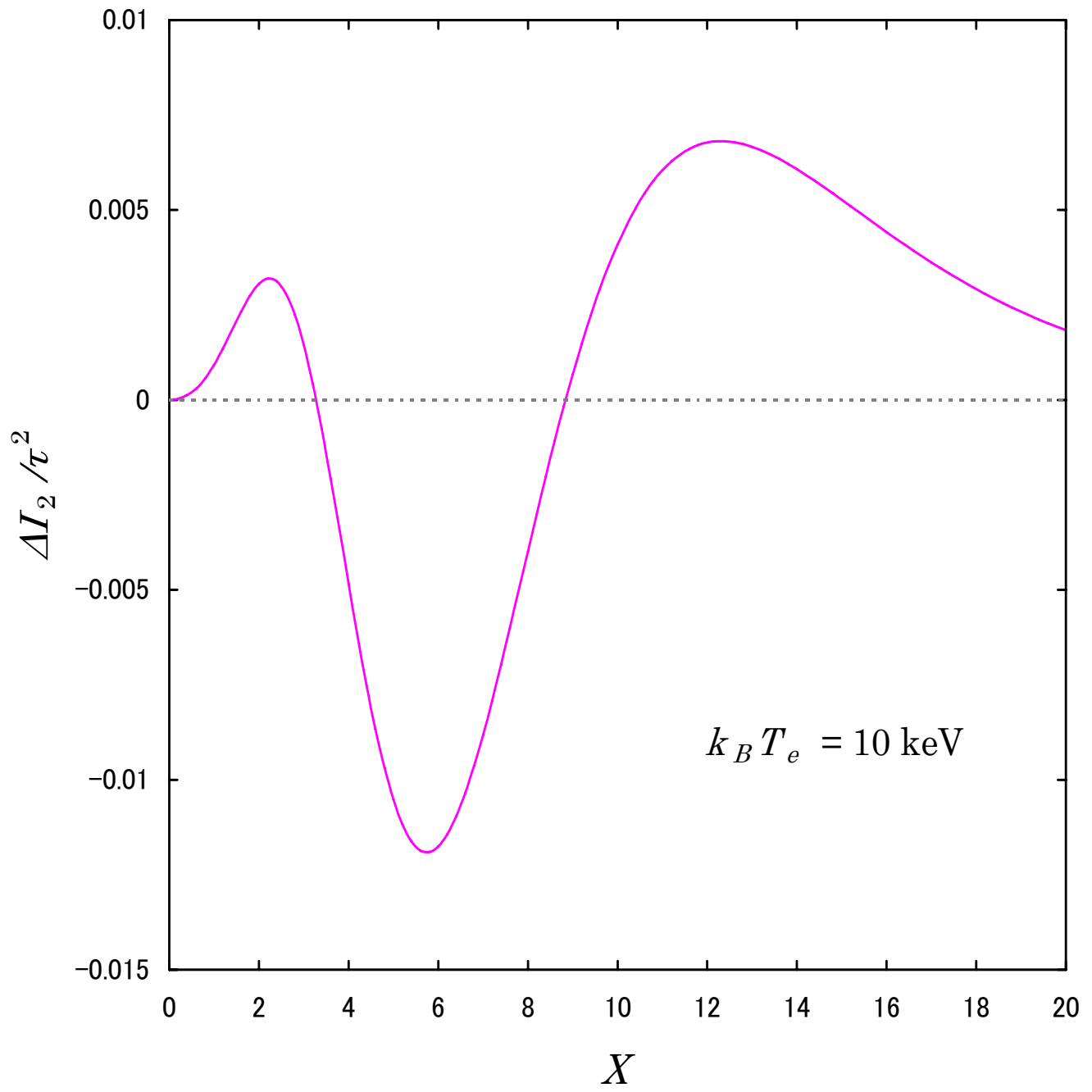


図 2.28: 銀河団の温度が 10 keV のときの 2 回散乱成分のグラフ。

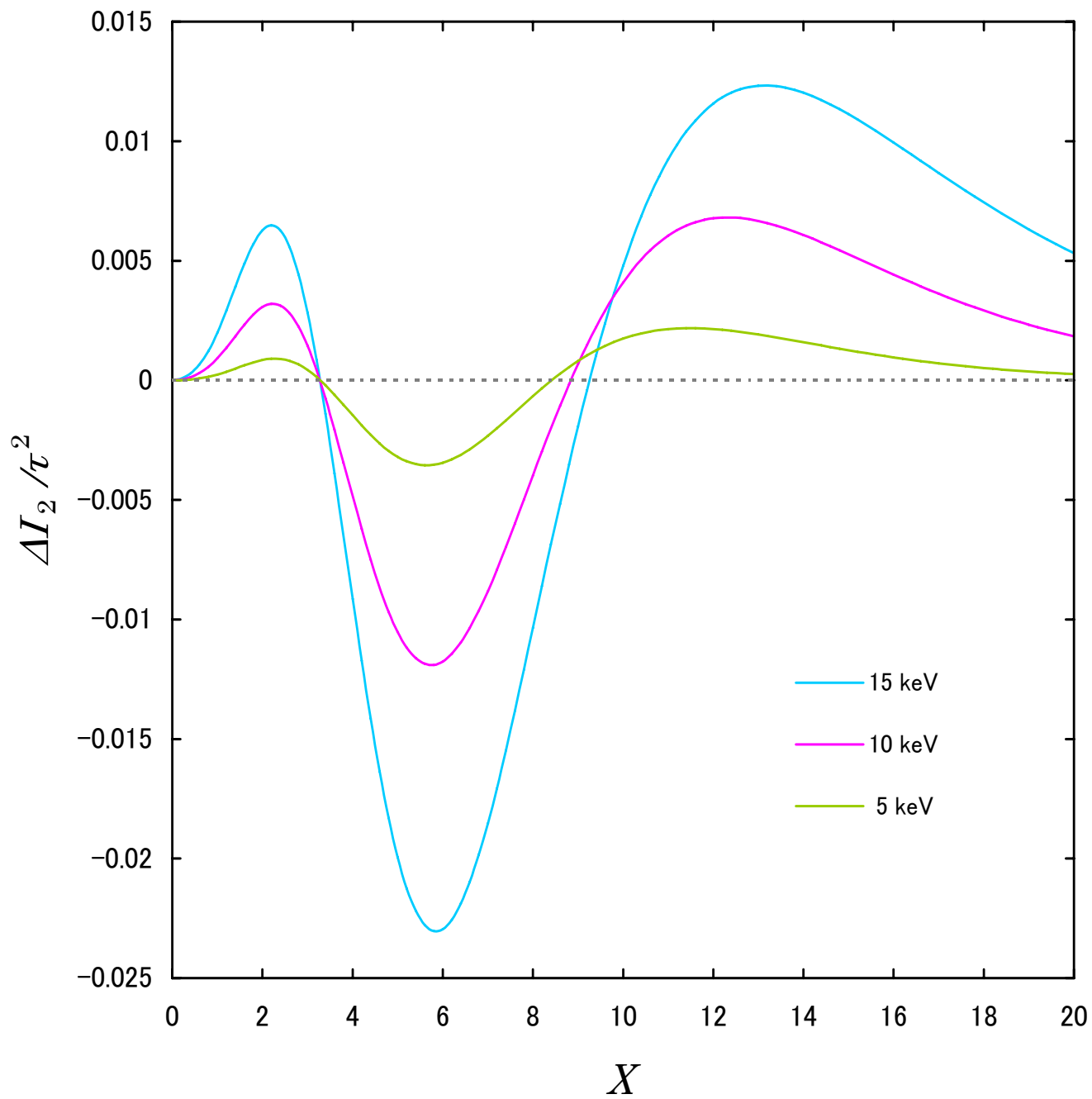


図 2.29: 銀河団の温度が 5 keV、10 keV、15 keV のときの 2 回散乱成分を比較したグラフ。

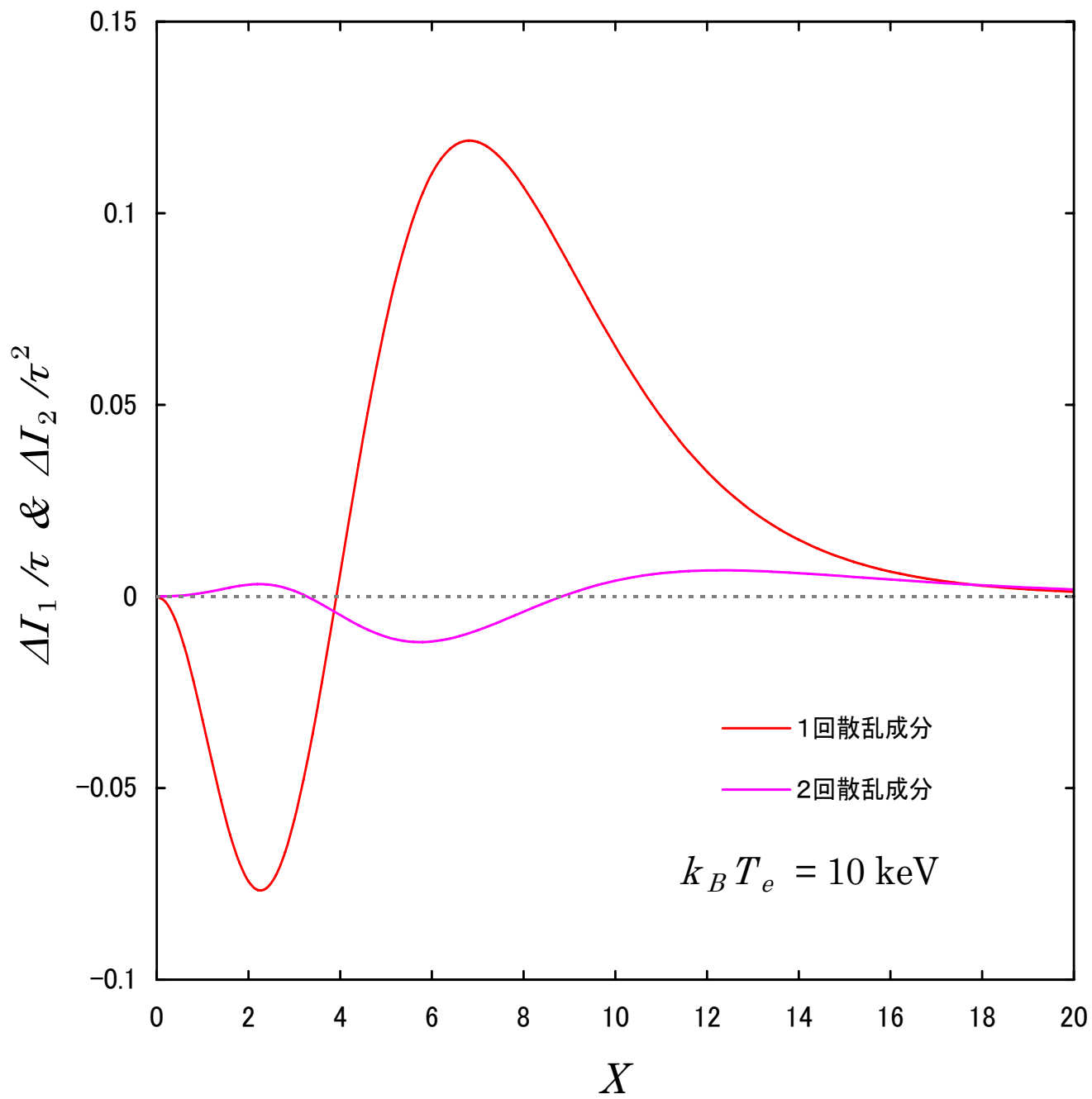


図 2.30: 銀河団の温度が 10 keV のときの 2 回散乱成分と 1 回散乱成分を比較したグラフ。

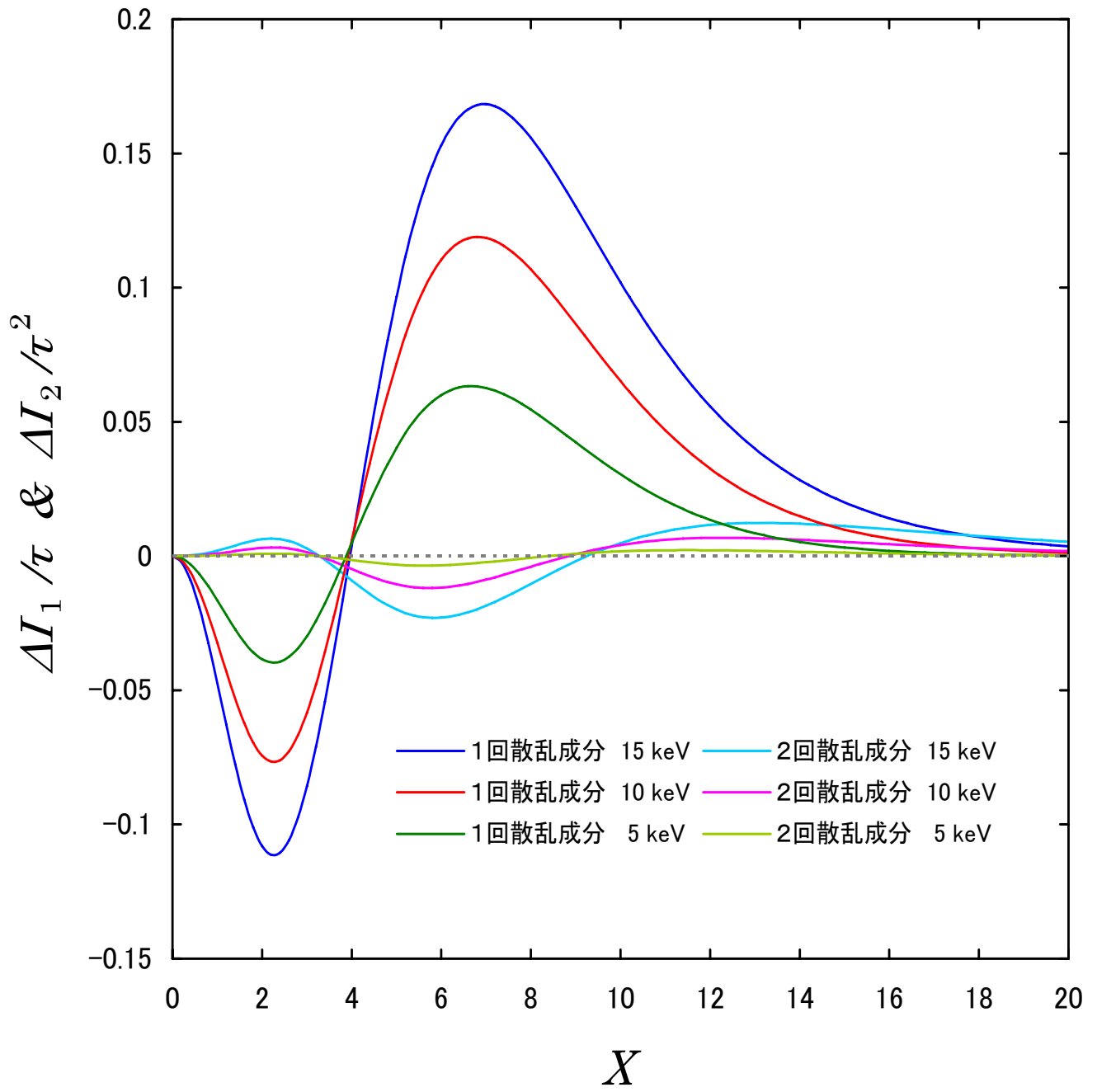


図 2.31: 銀河団の温度が  $k_B T_e = 5 \text{ keV}$ 、 $10 \text{ keV}$ 、 $15 \text{ keV}$  の場合について、1 回散乱成分と 2 回散乱成分を重ね合わせたグラフ。

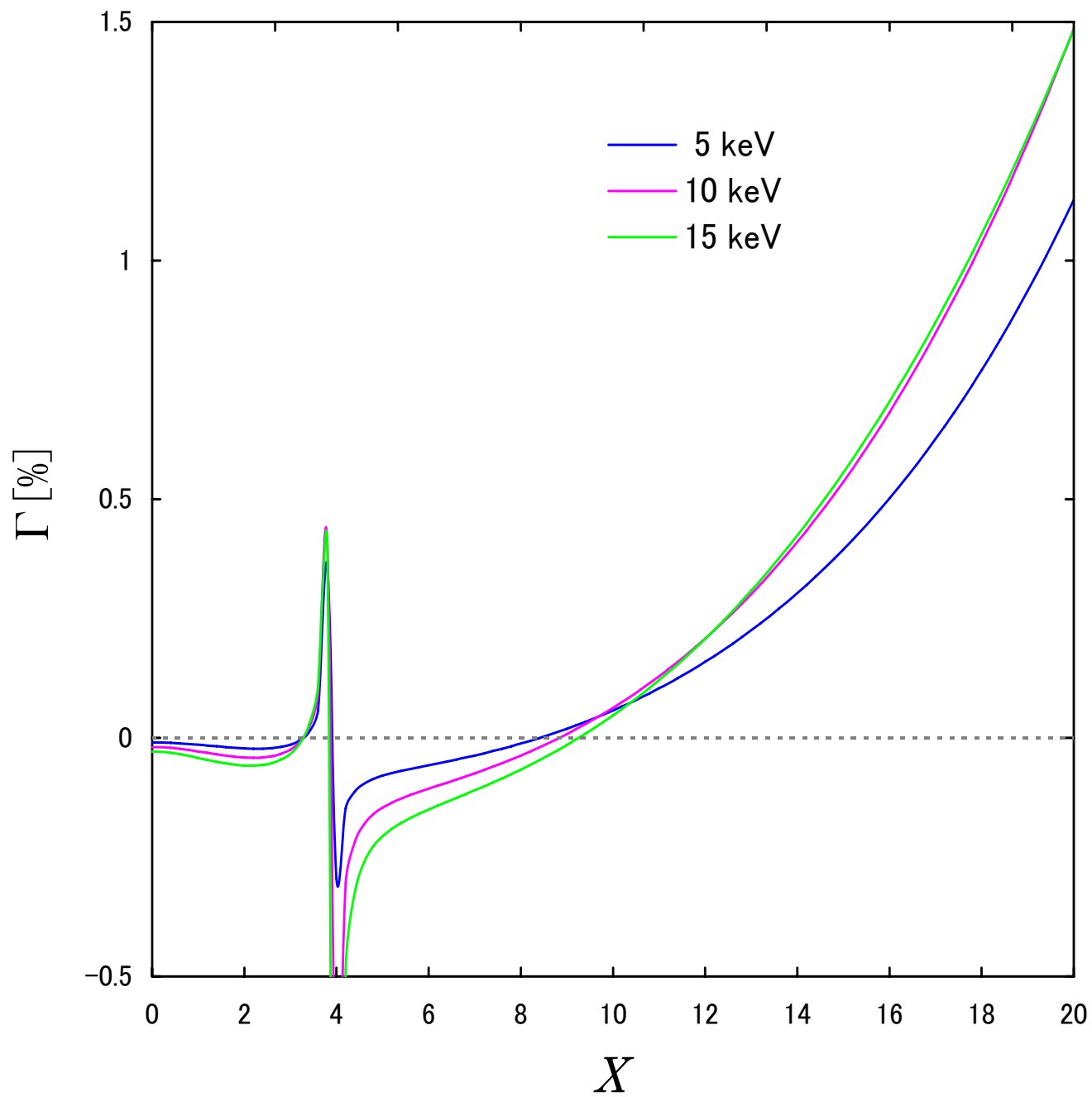


図 2.32: 1 回散乱成分に対する 2 回散乱成分の寄与を示すグラフ。

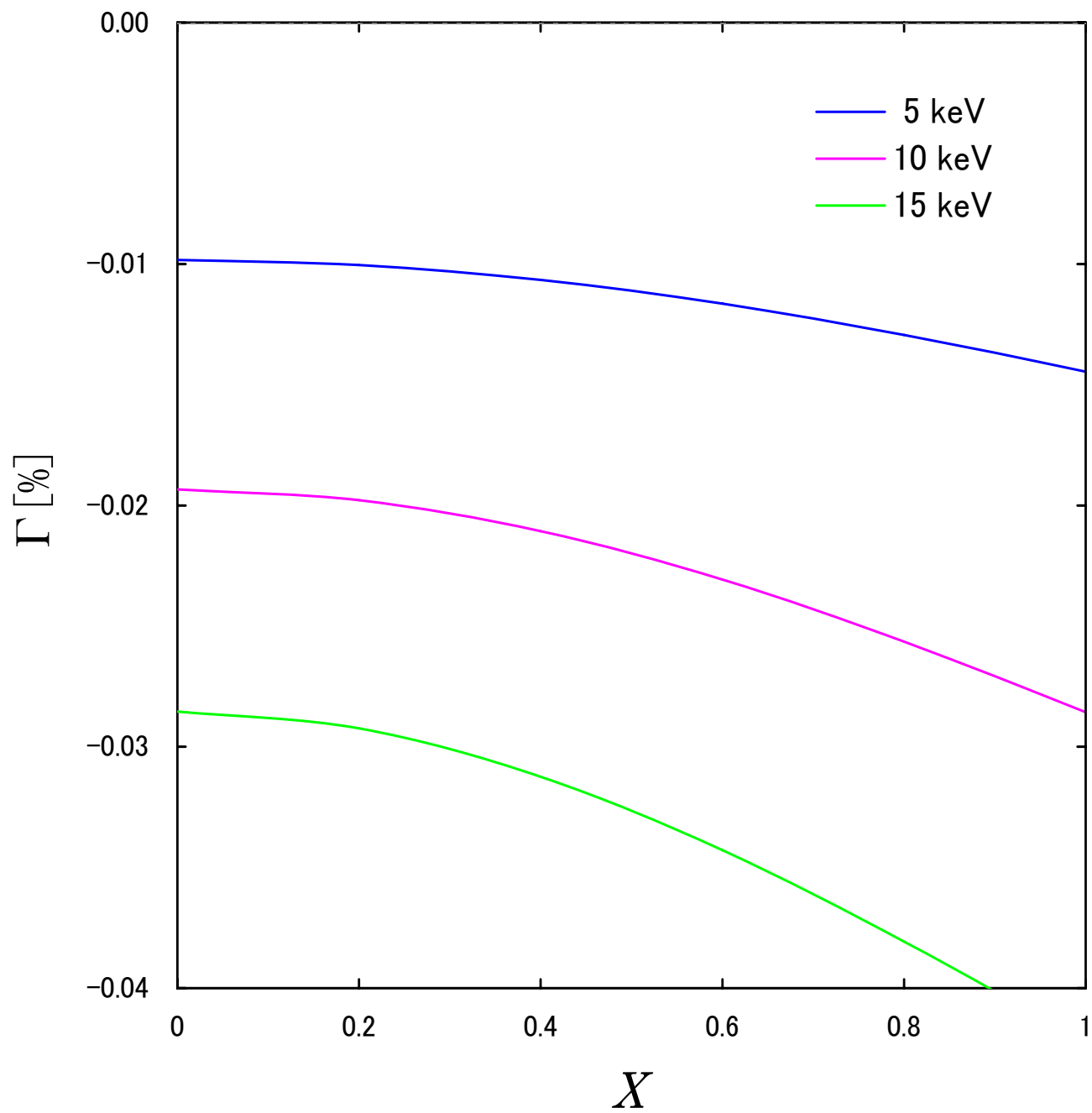


図 2.33: 図 2.32 の低周波数部分を拡大したグラフ。



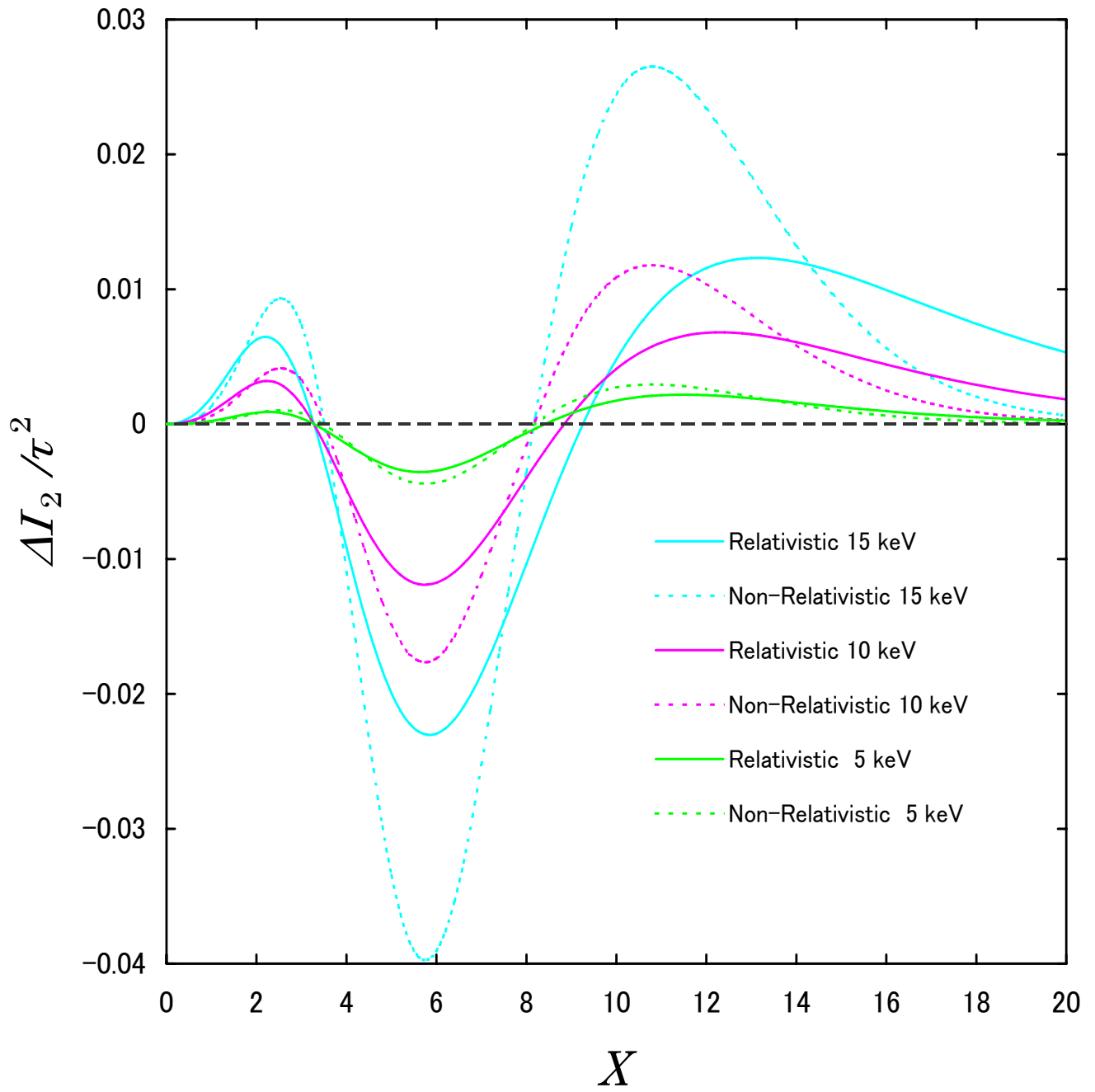


図 2.34: 銀河団の温度が  $k_B T_e = 5 \text{ keV}$ 、 $10 \text{ keV}$ 、 $15 \text{ keV}$  の場合について、非相対論的に計算した結果と相対論的に計算した結果を重ね合わせたグラフ。

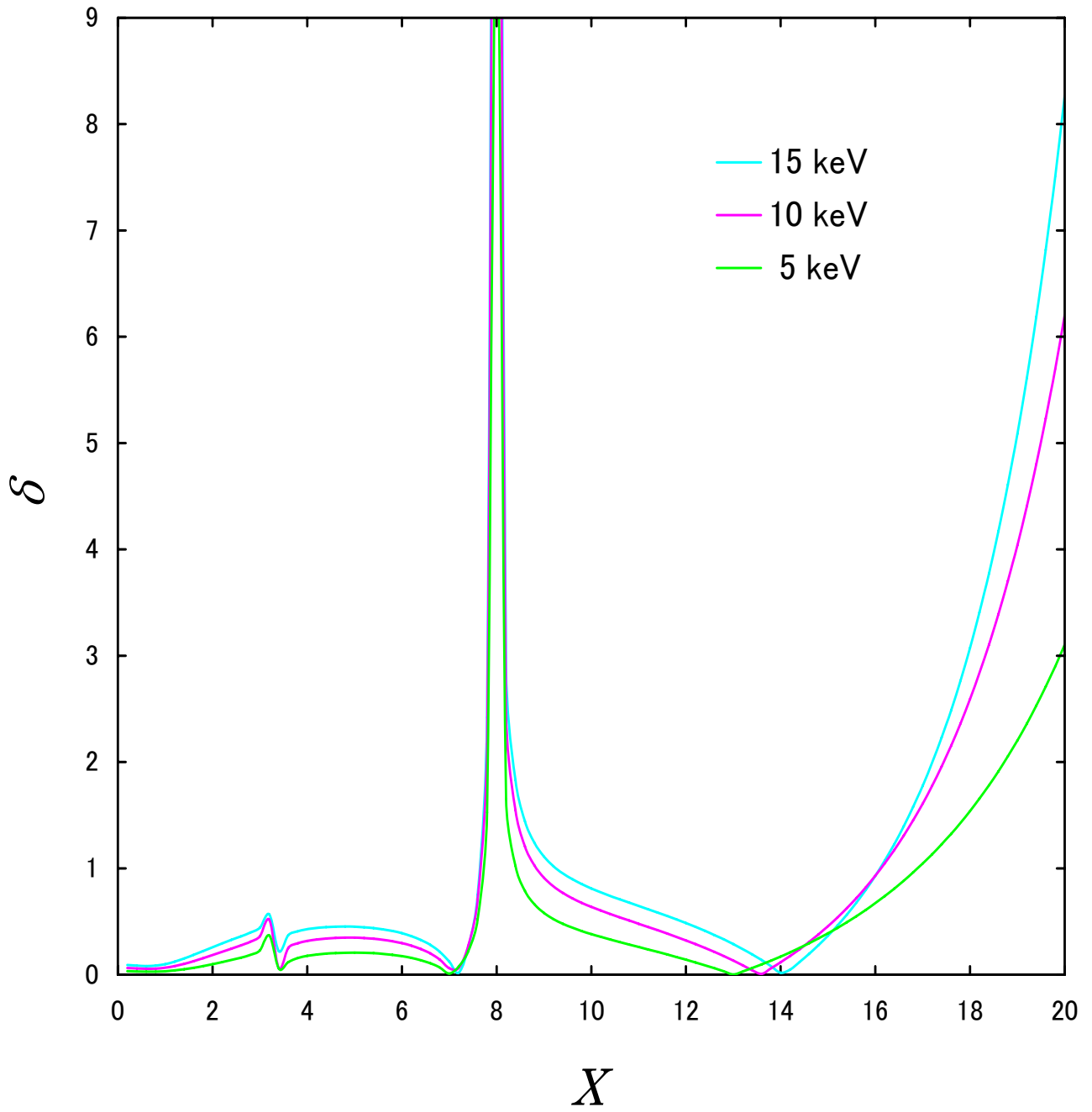


図 2.35: 銀河団の温度が  $k_B T_e = 5 \text{ keV}$ 、 $10 \text{ keV}$ 、 $15 \text{ keV}$  の場合について、非相対論的に計算した結果と相対論的に計算した結果の相対誤差を示したグラフ。

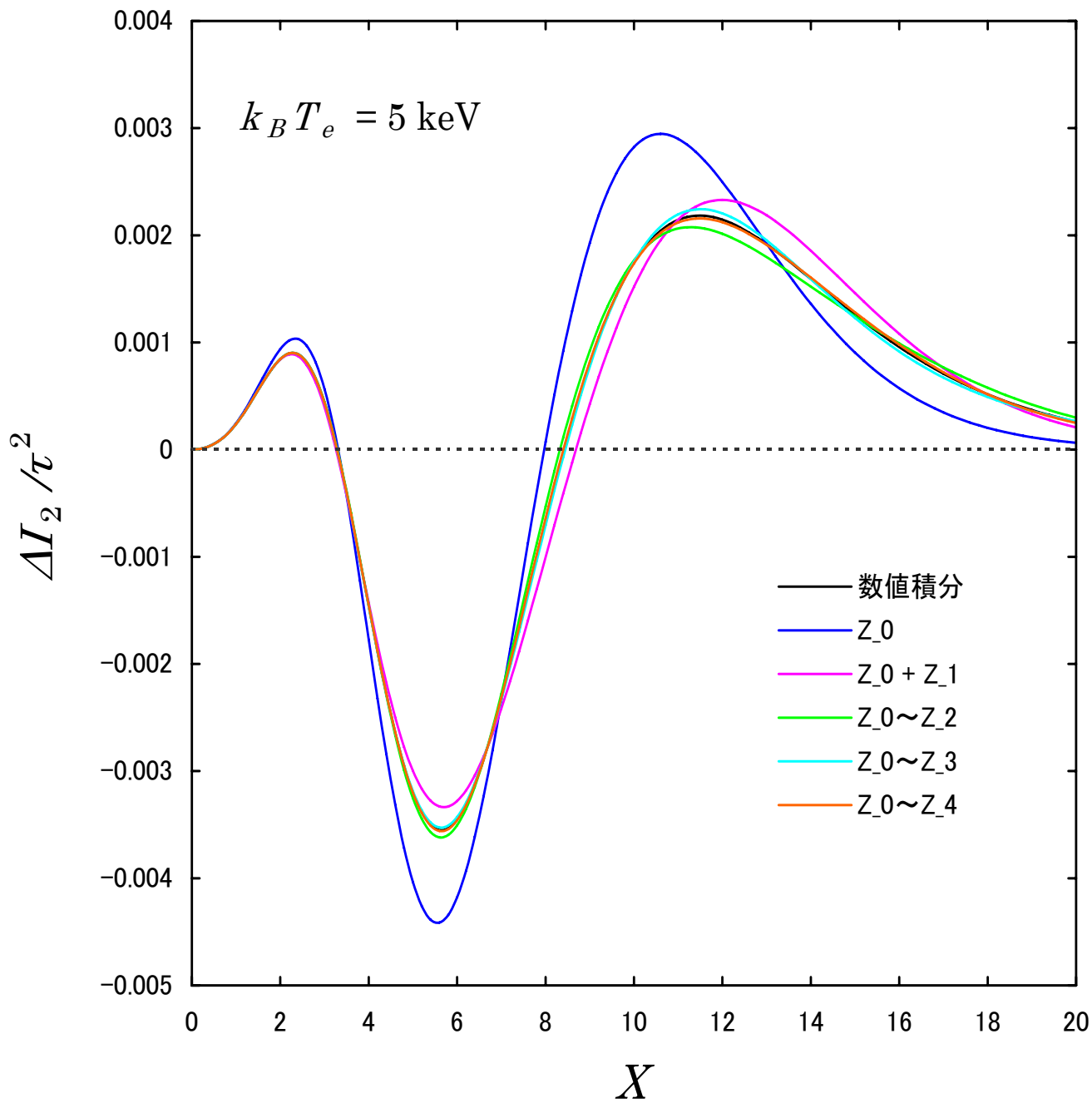


図 2.36: 5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

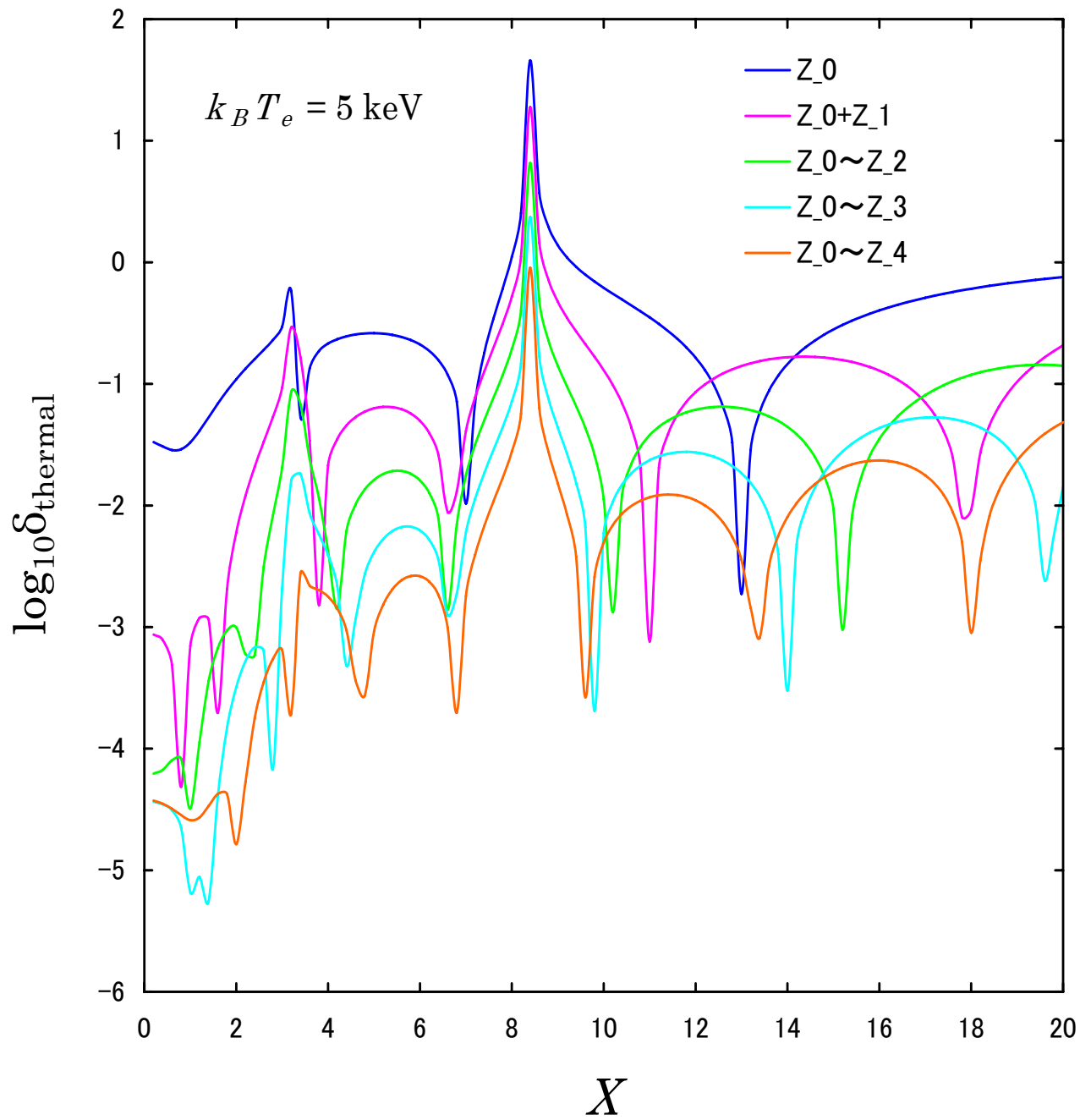


図 2.37: 5 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

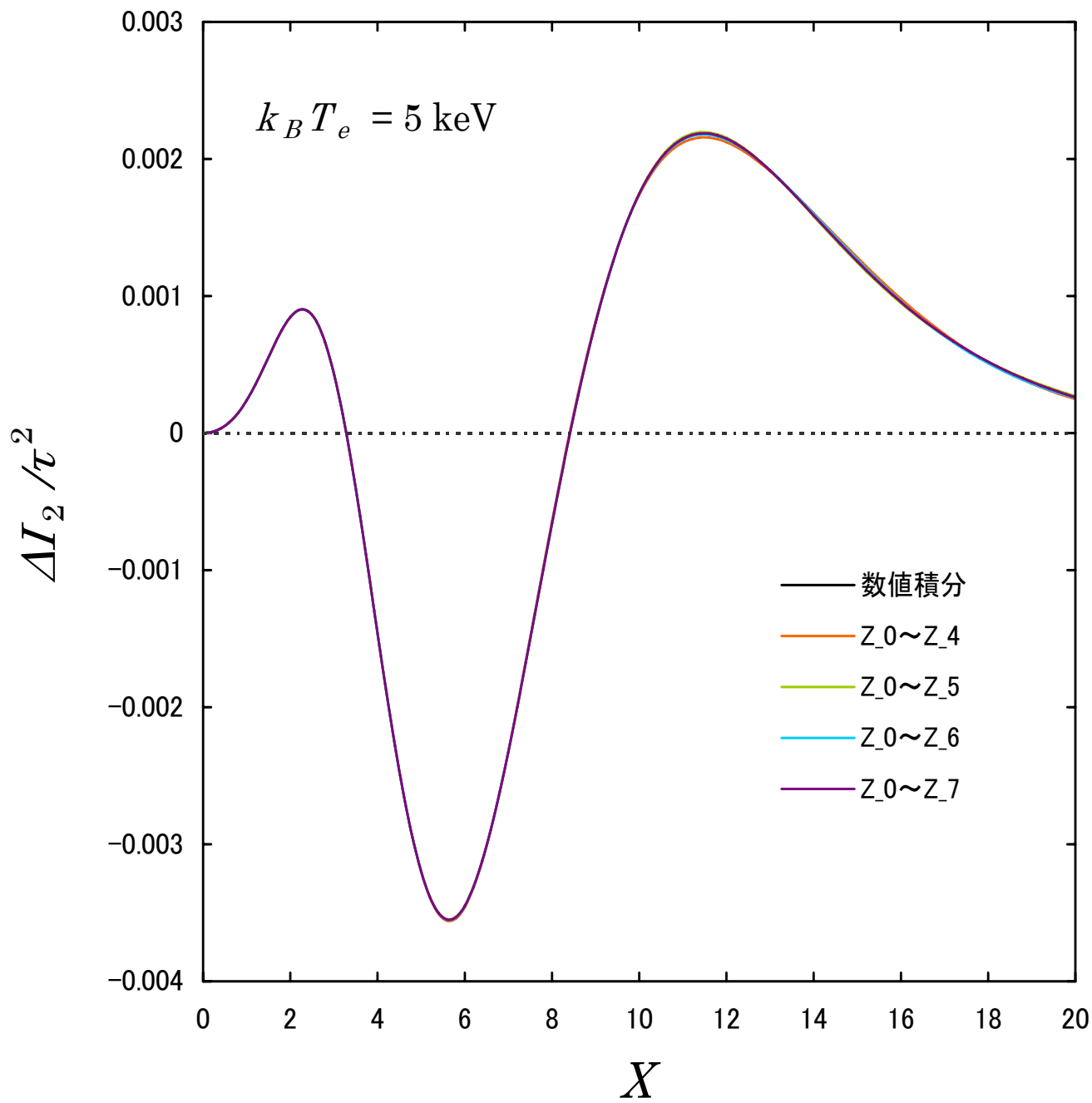


図 2.38: 5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

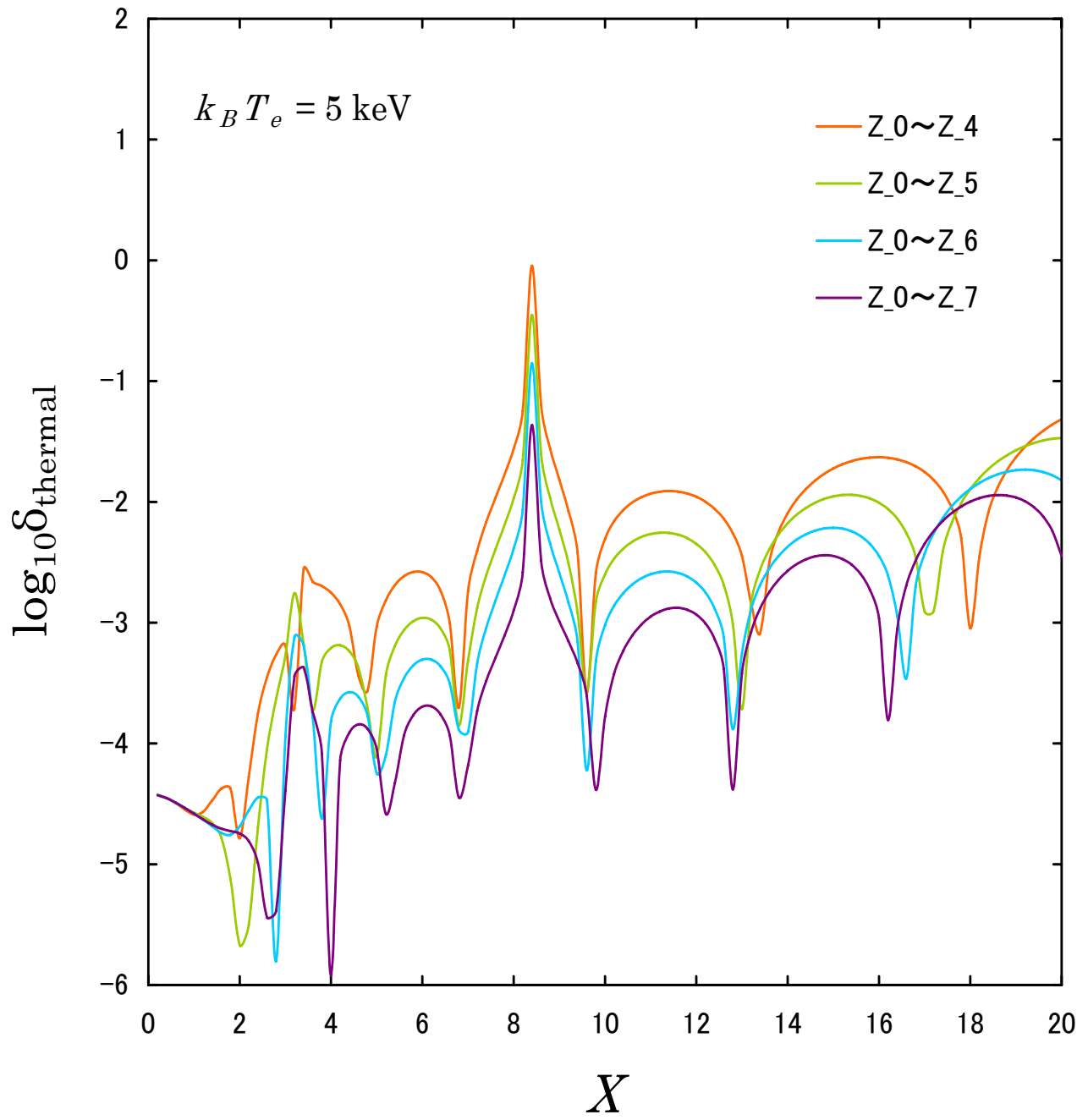


図 2.39: 5 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

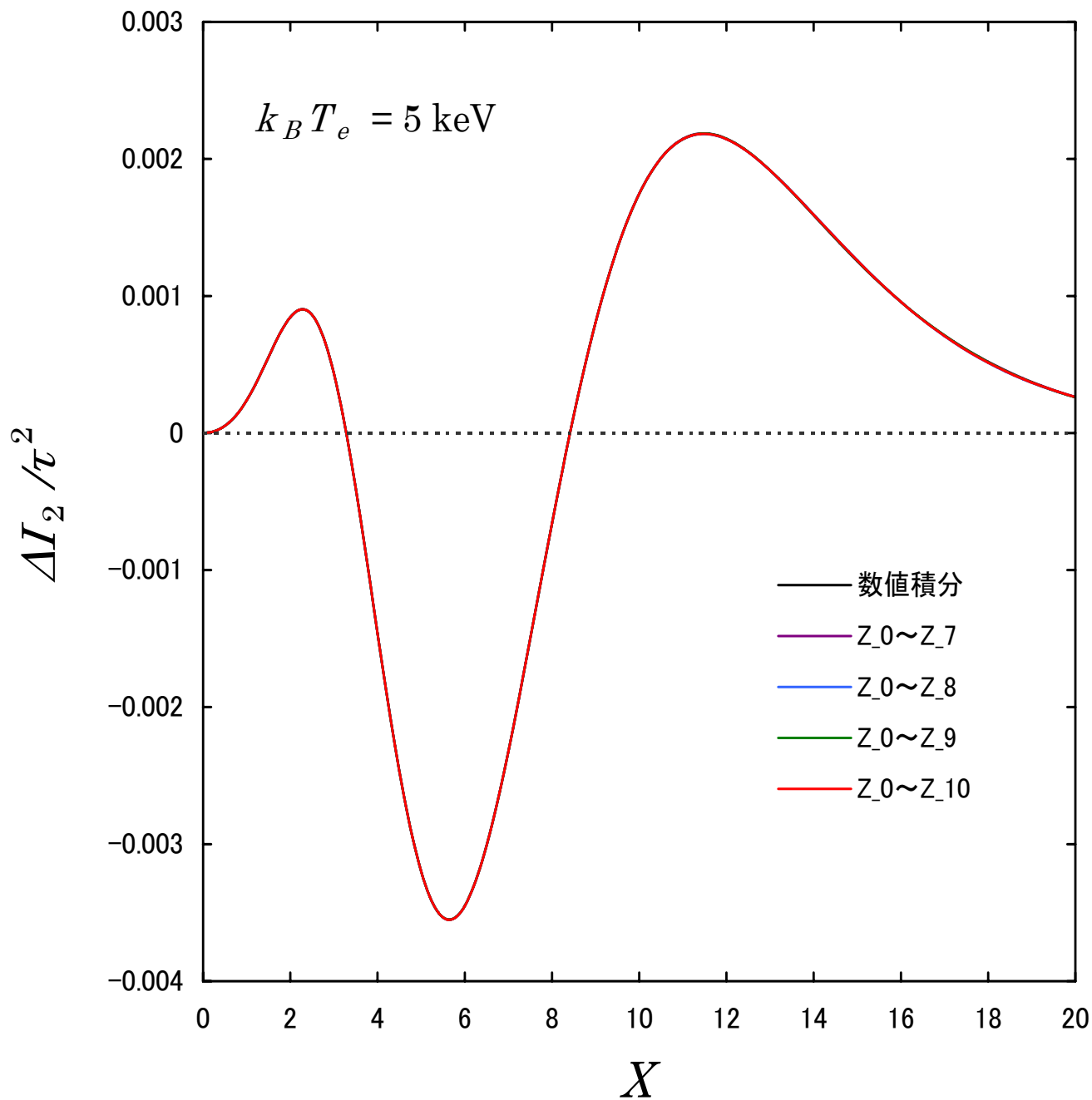


図 2.40: 5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

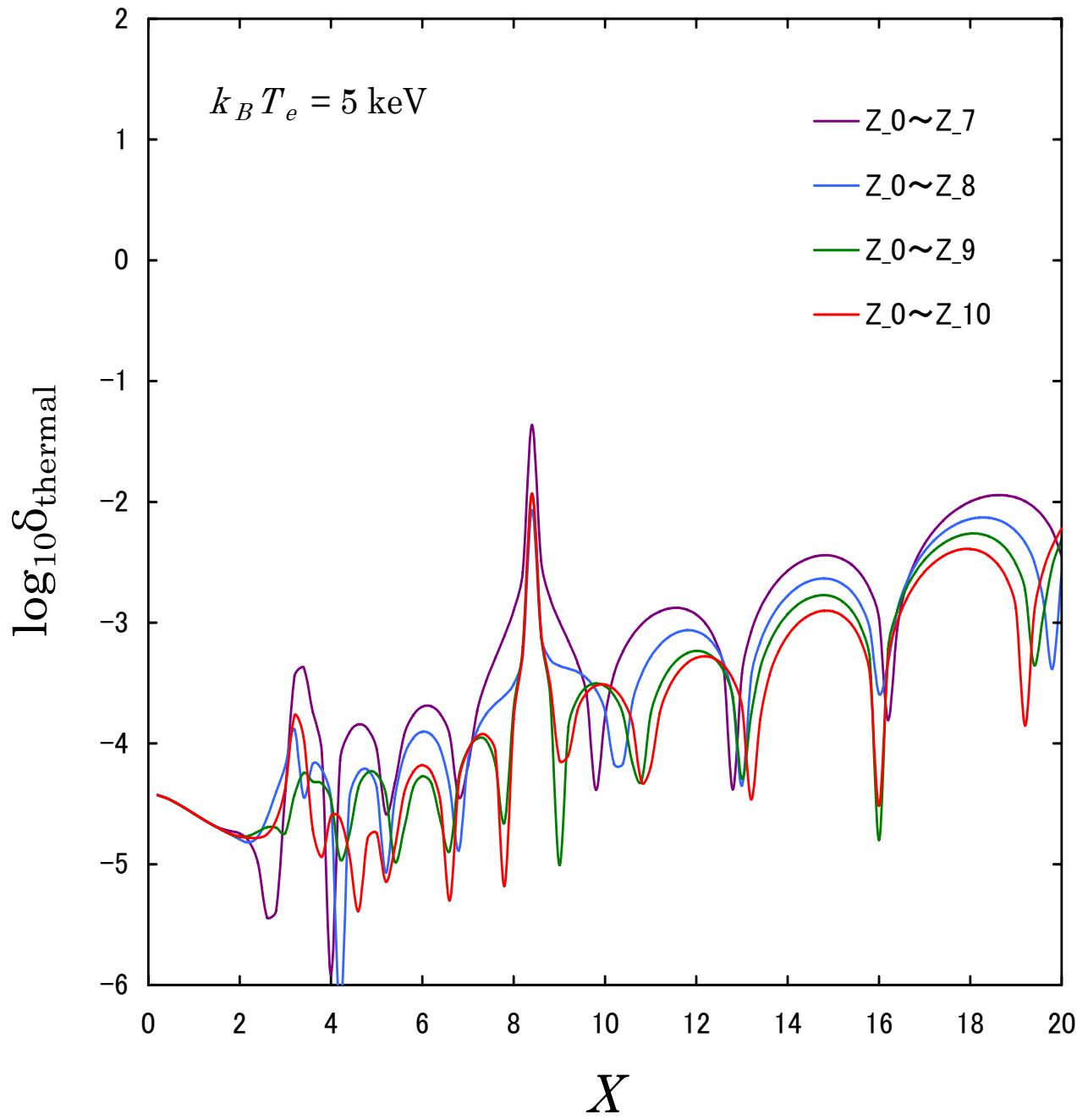


図 2.41: 5 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。



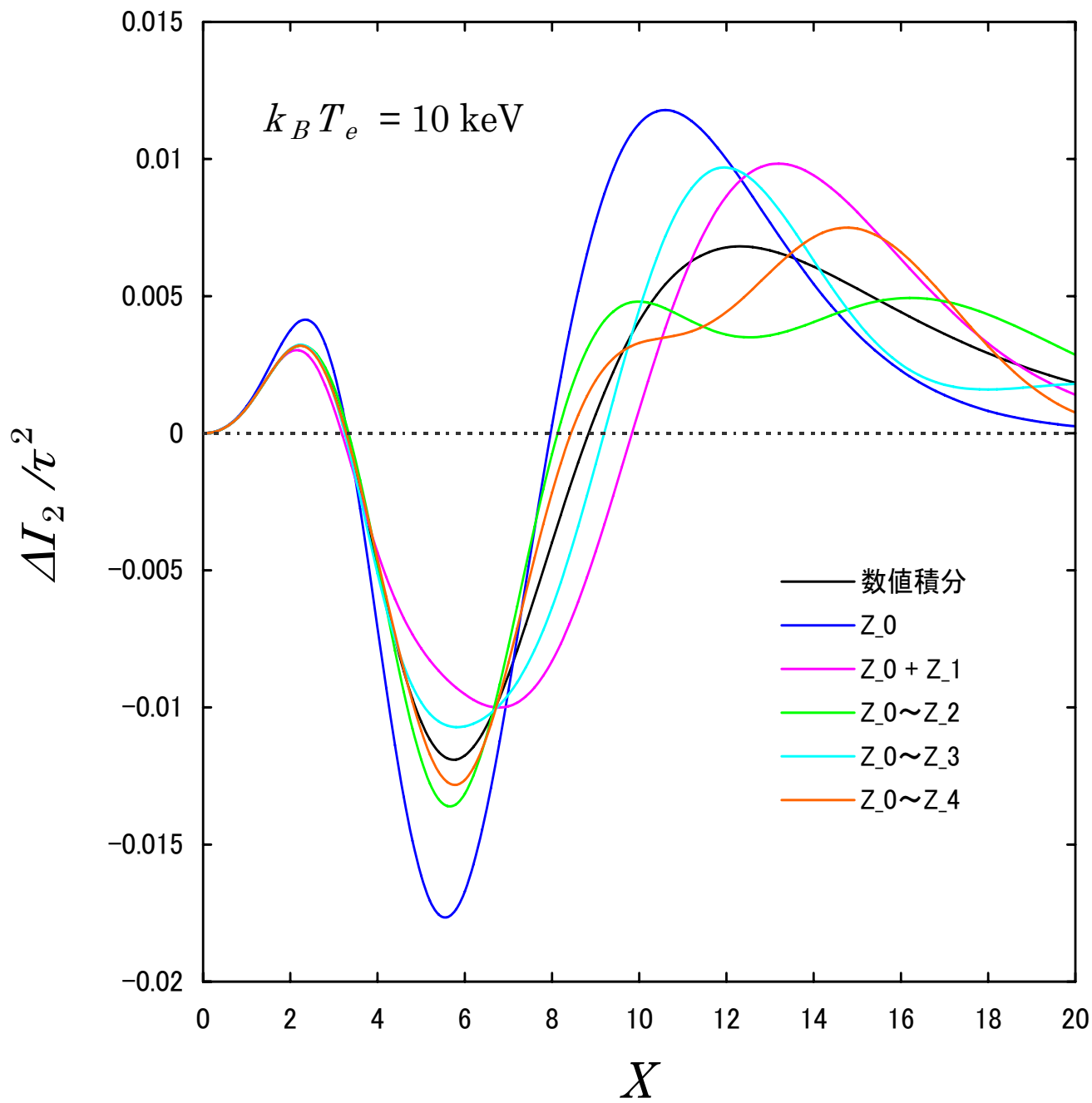


図 2.42: 10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

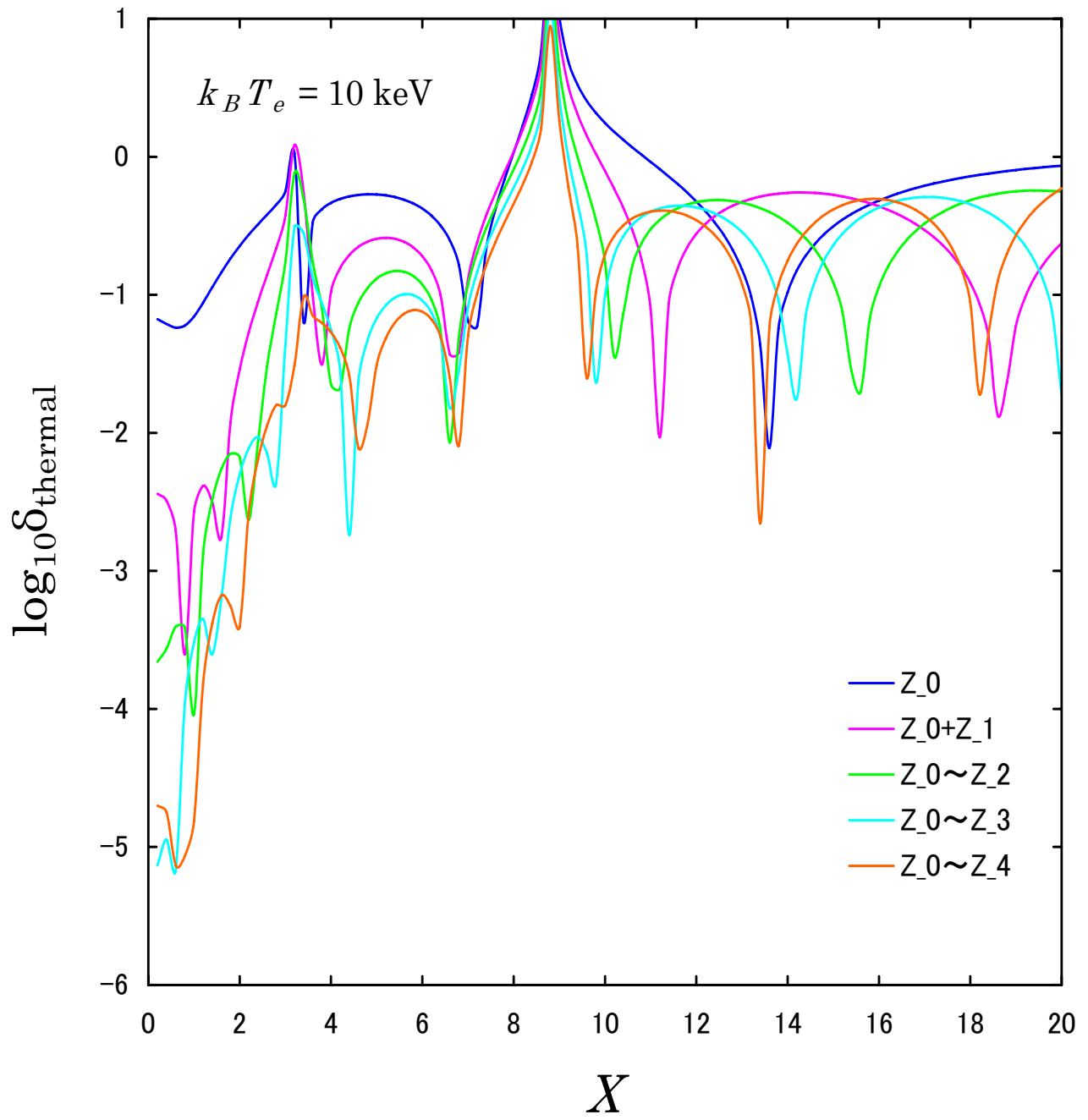


図 2.43: 10 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

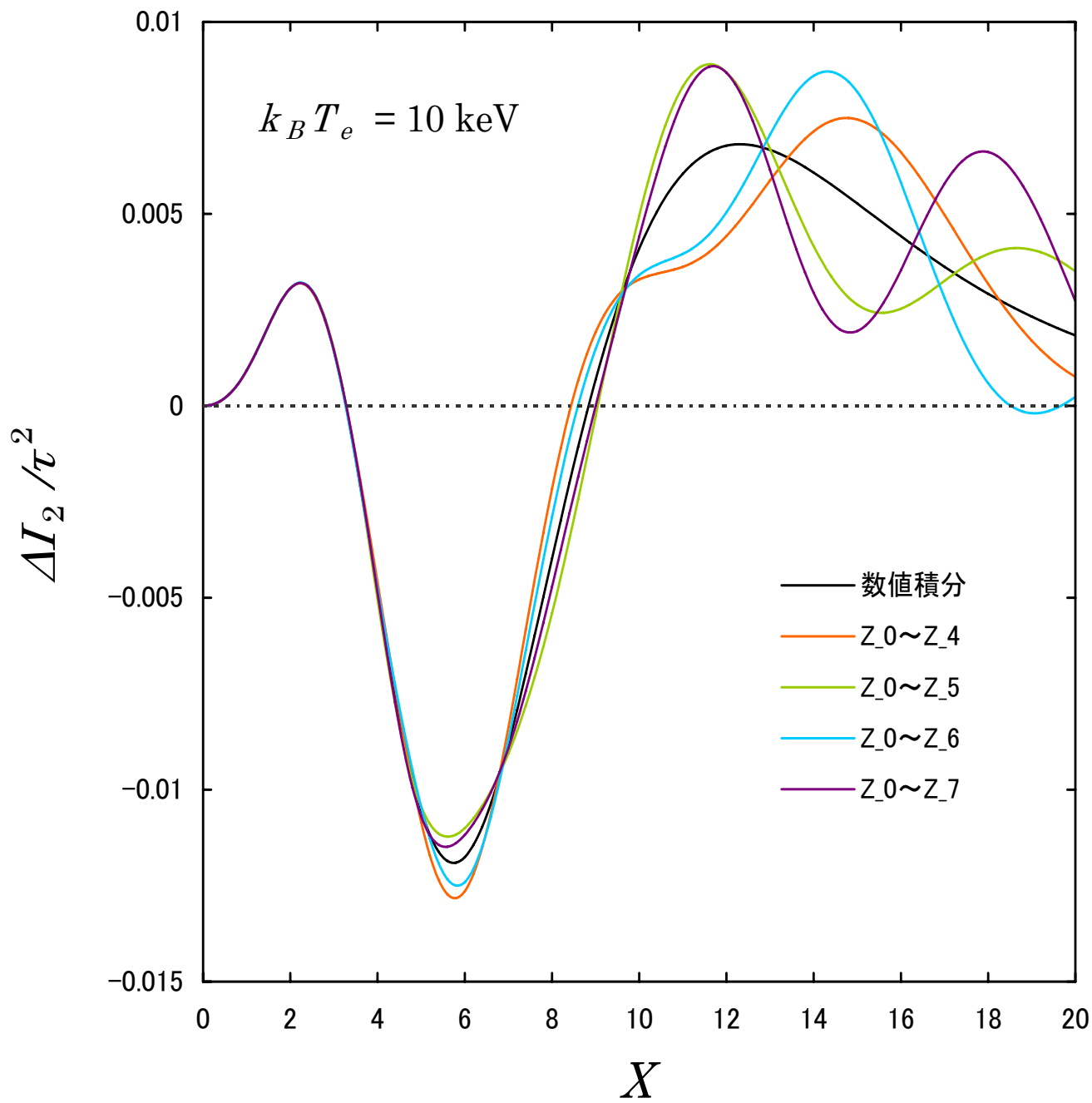


図 2.44: 10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

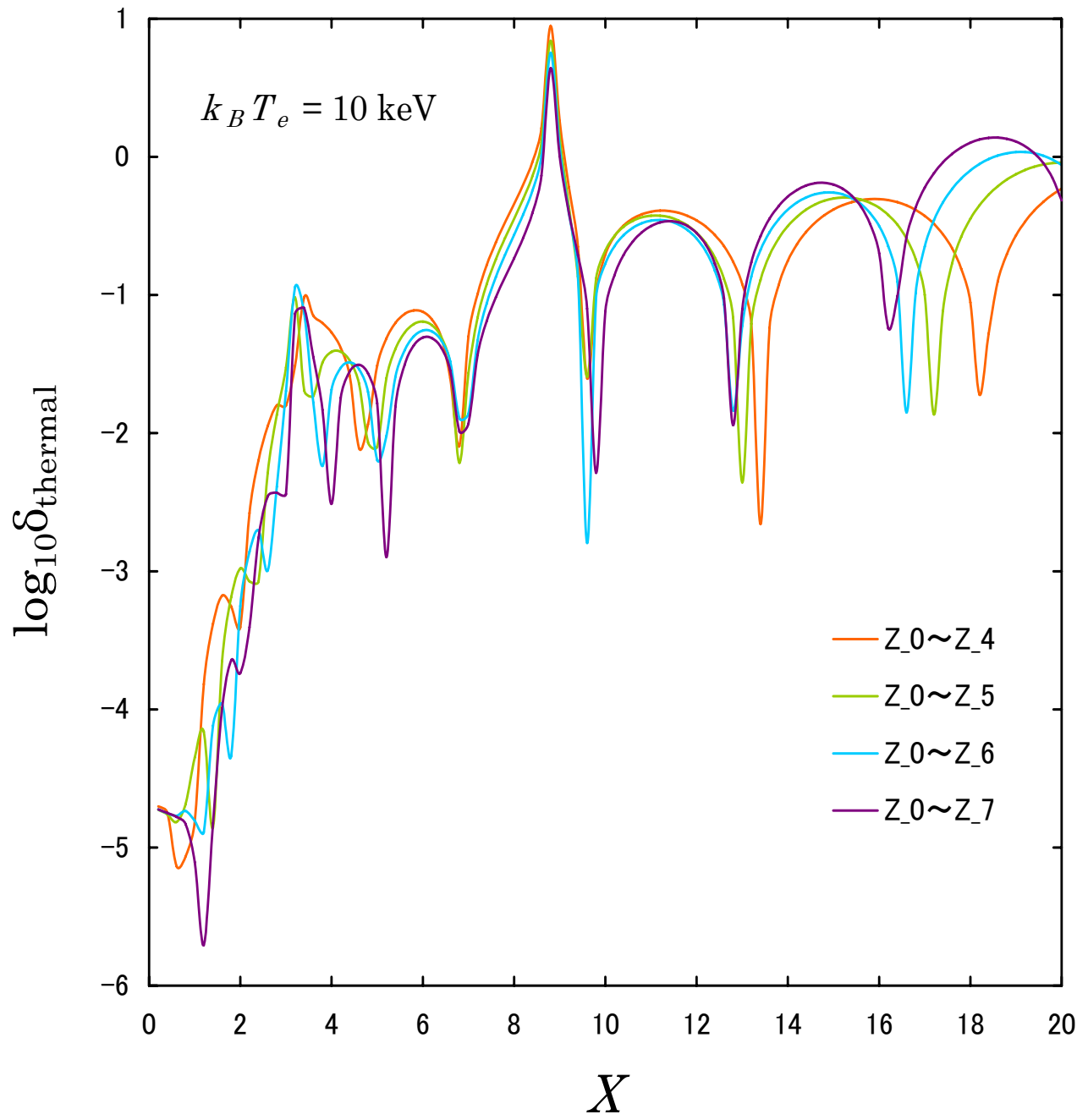


図 2.45: 10 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

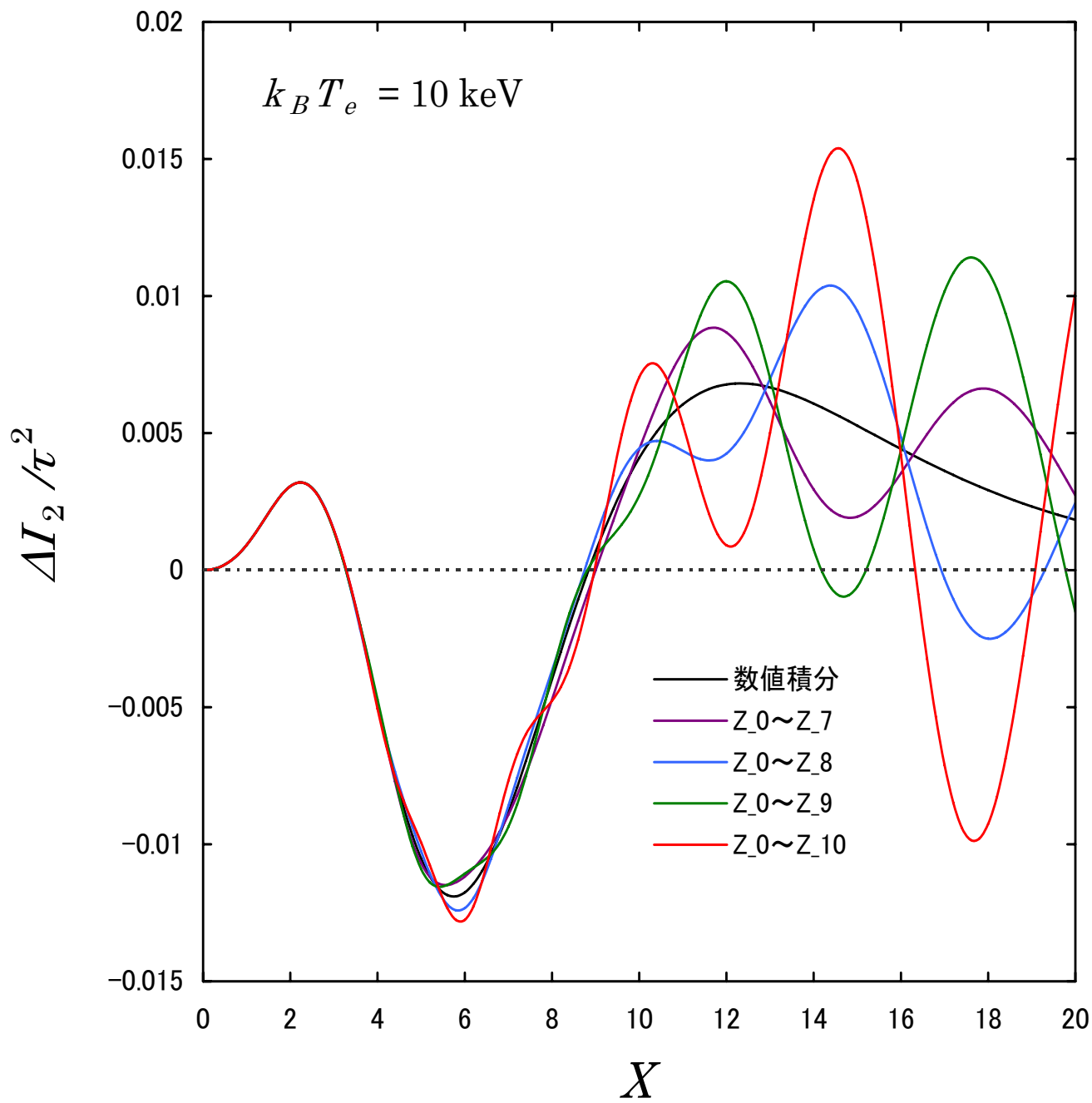


図 2.46: 10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

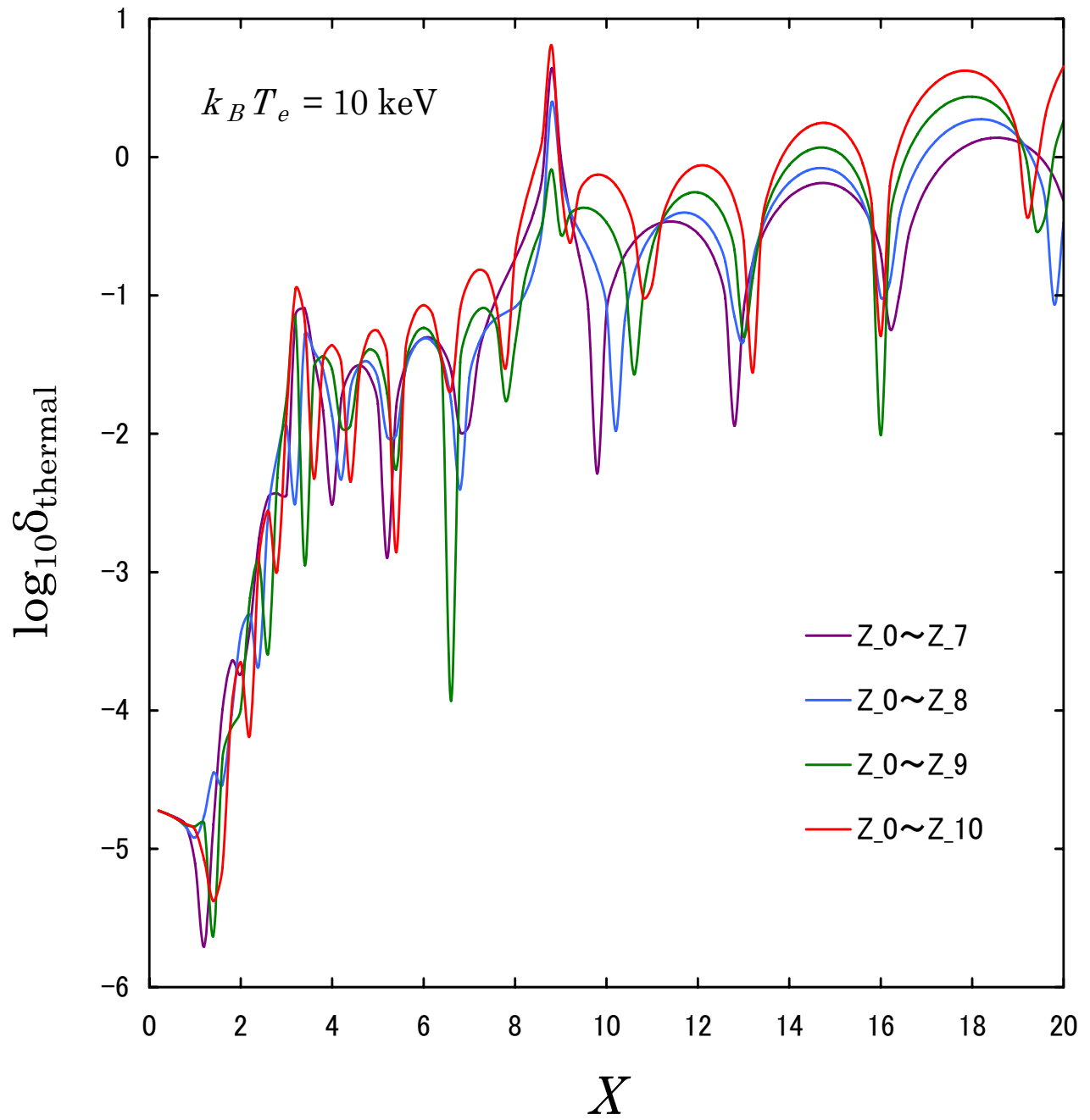


図 2.47: 10 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

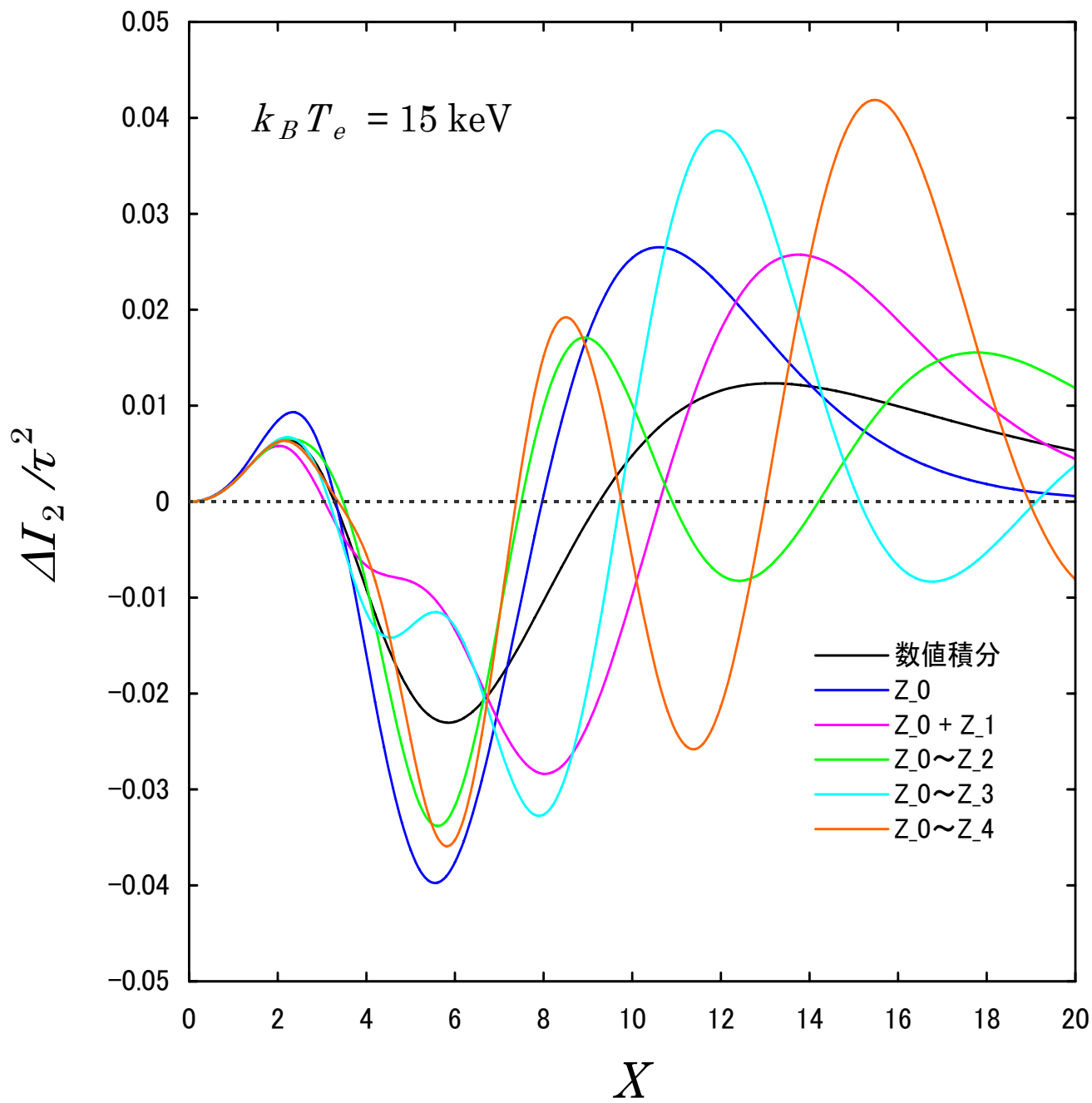


図 2.48: 15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

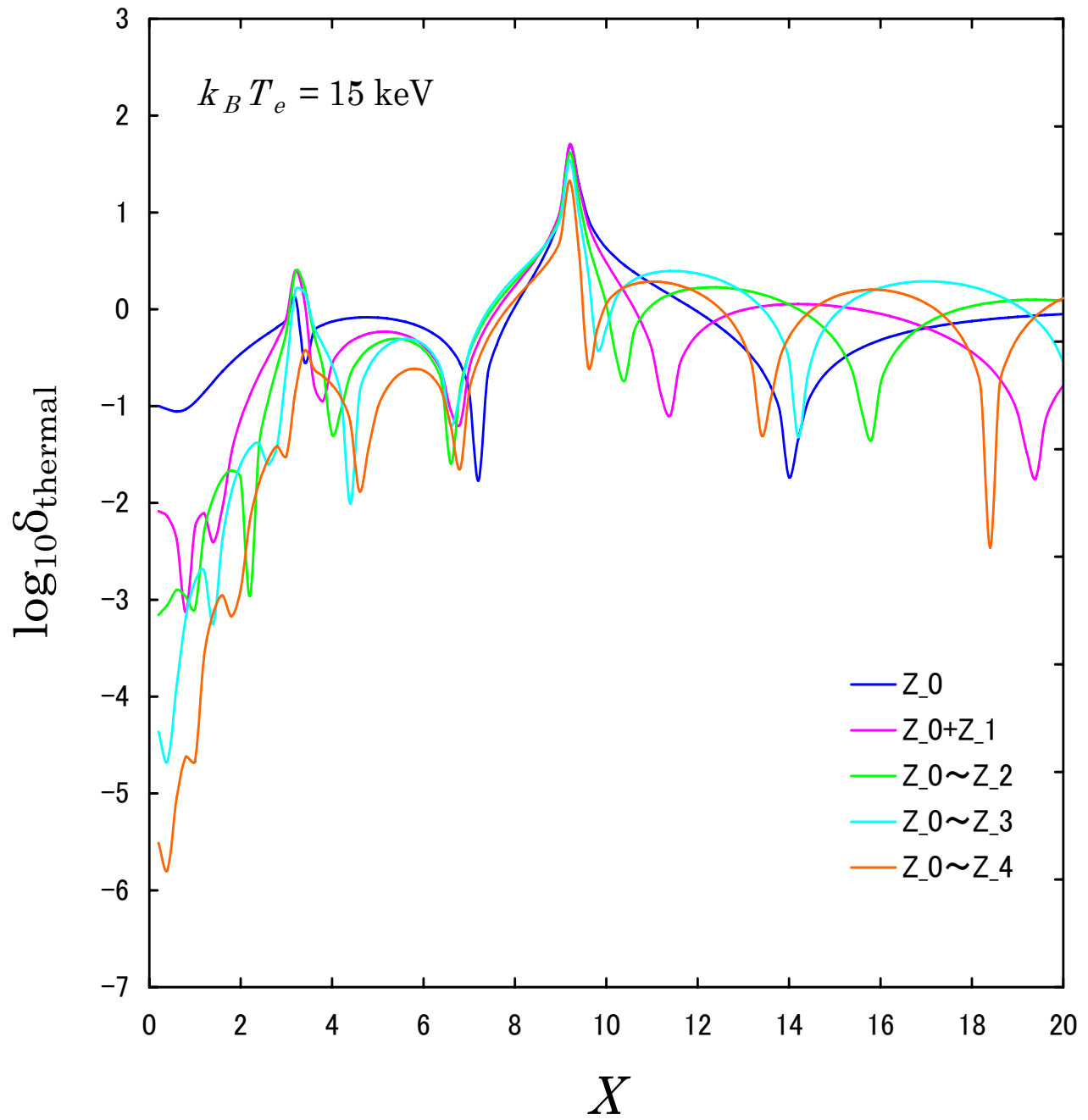


図 2.49: 15 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0$ 、 $Z_0 \sim Z_1$ 、 $Z_0 \sim Z_2$ 、 $Z_0 \sim Z_3$ 、 $Z_0 \sim Z_4$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。



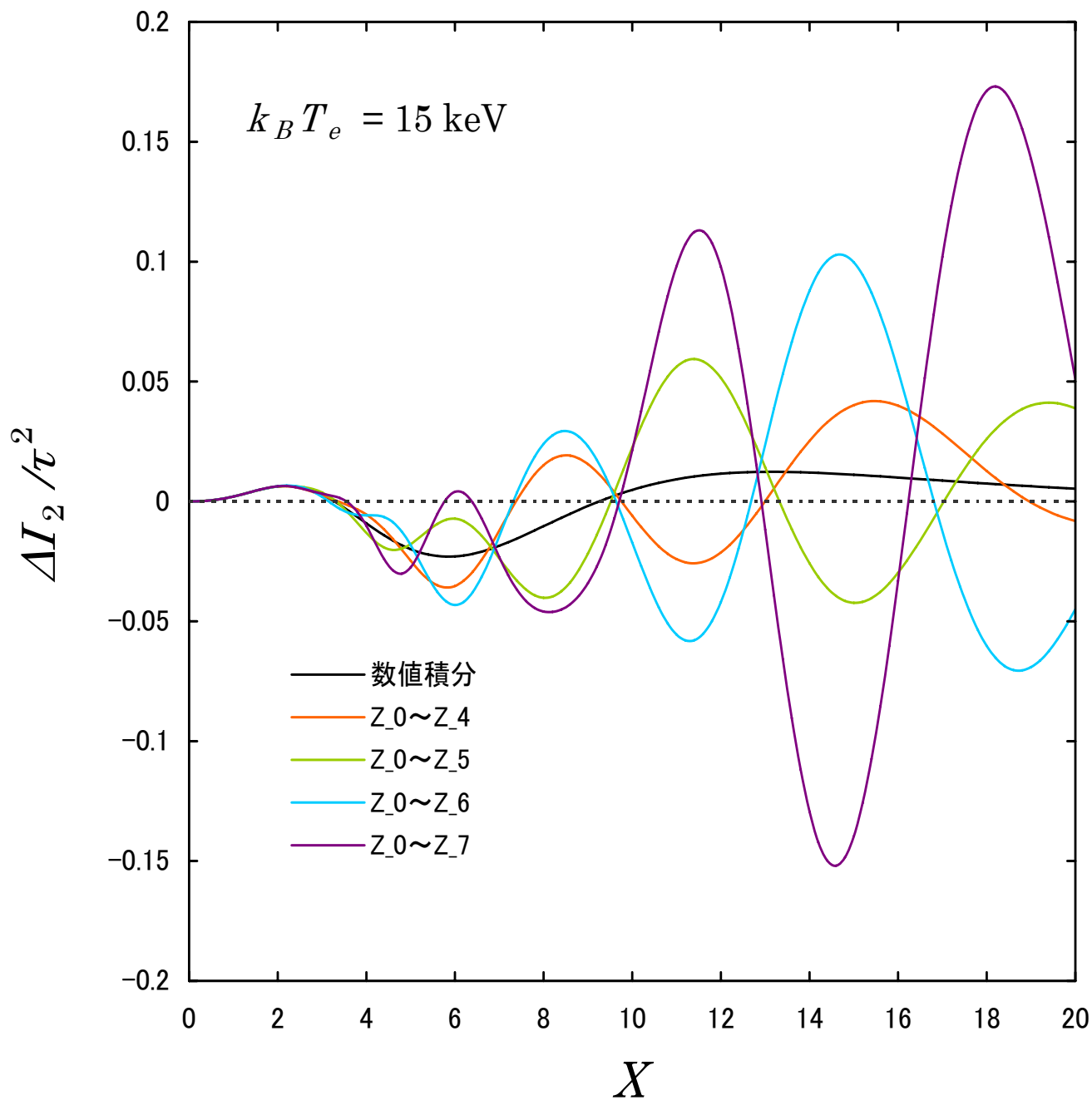


図 2.50: 15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

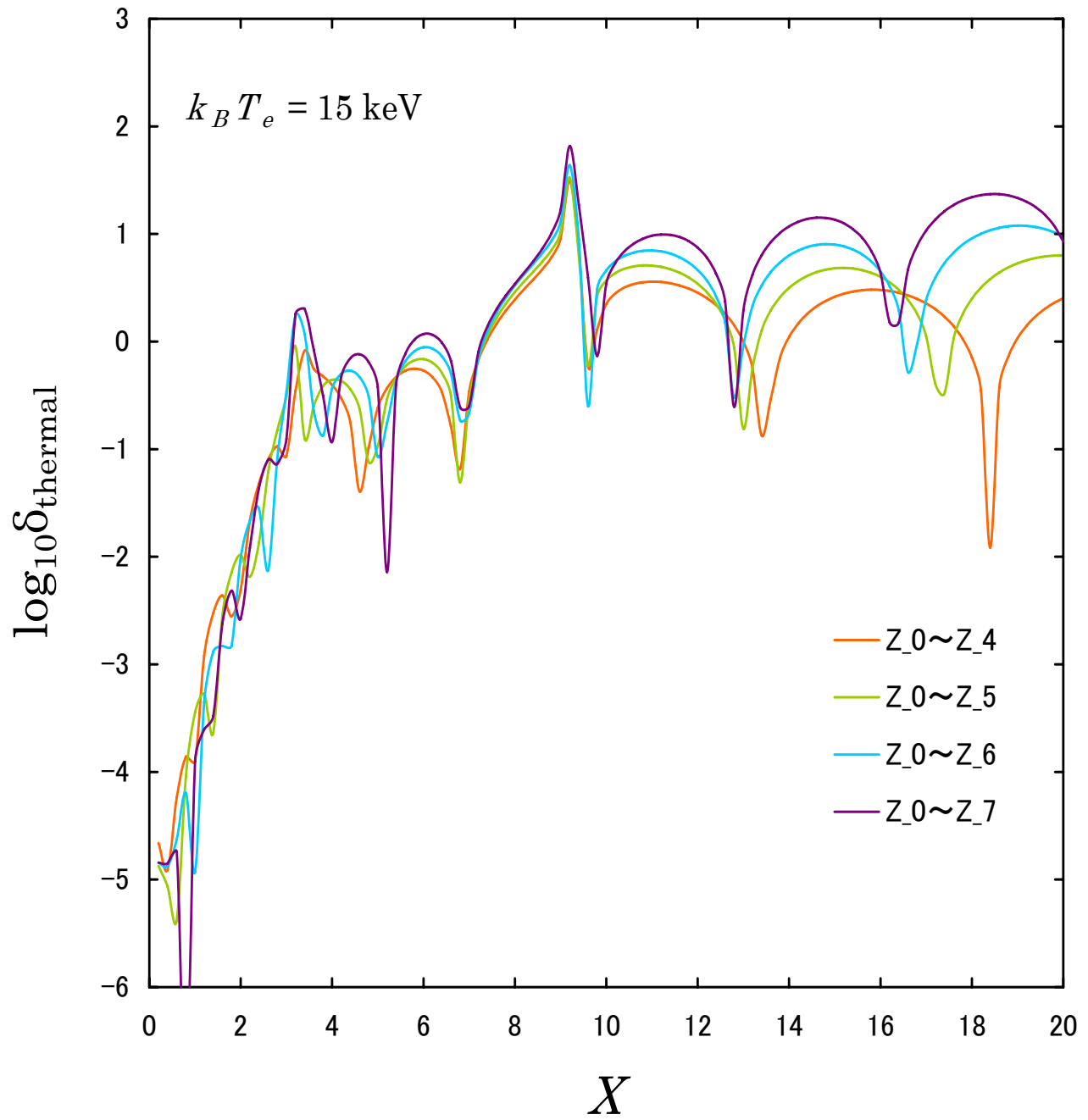


図 2.51: 15 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0 \sim Z_4$ 、 $Z_0 \sim Z_5$ 、 $Z_0 \sim Z_6$ 、 $Z_0 \sim Z_7$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

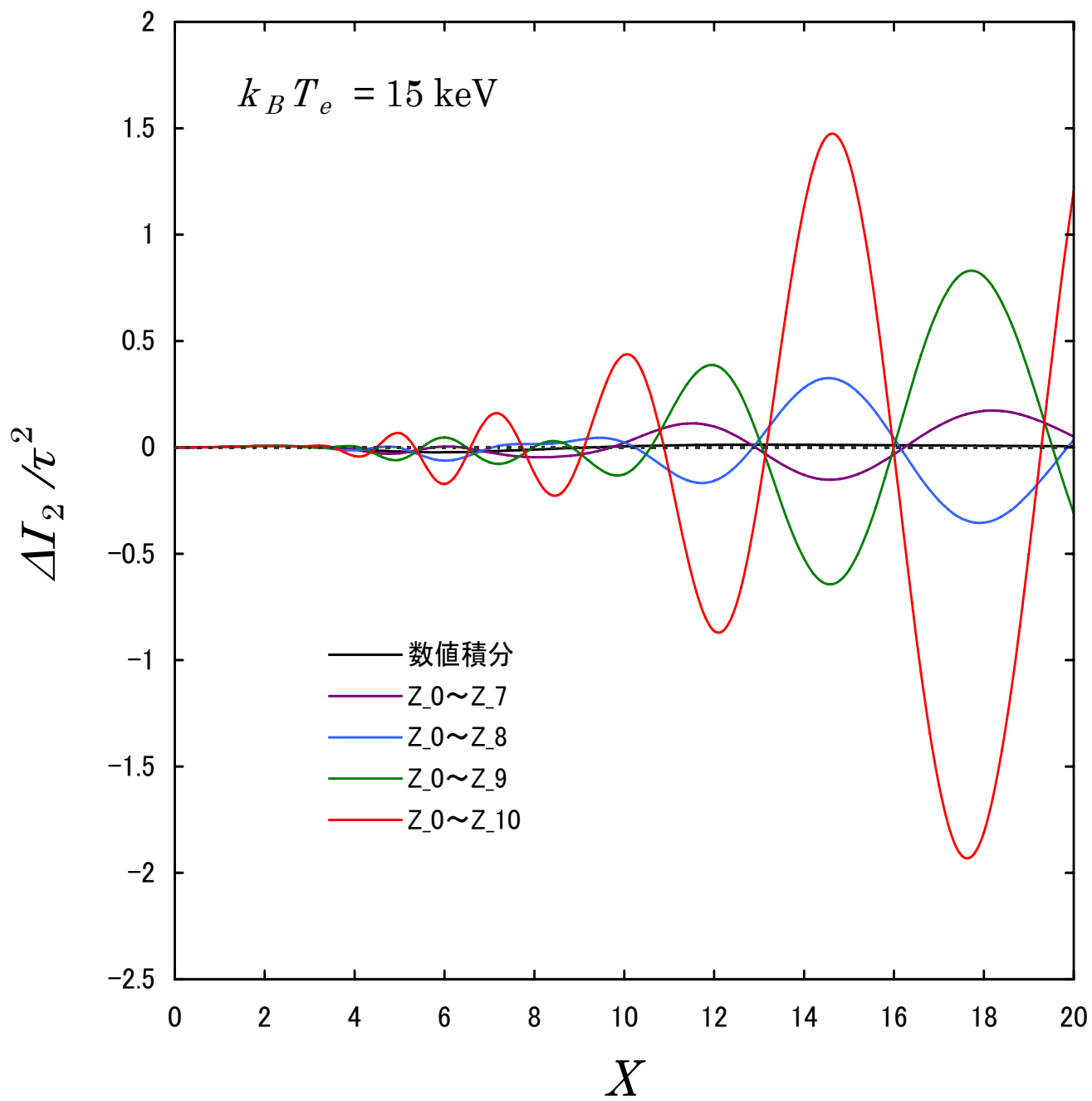


図 2.52: 15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

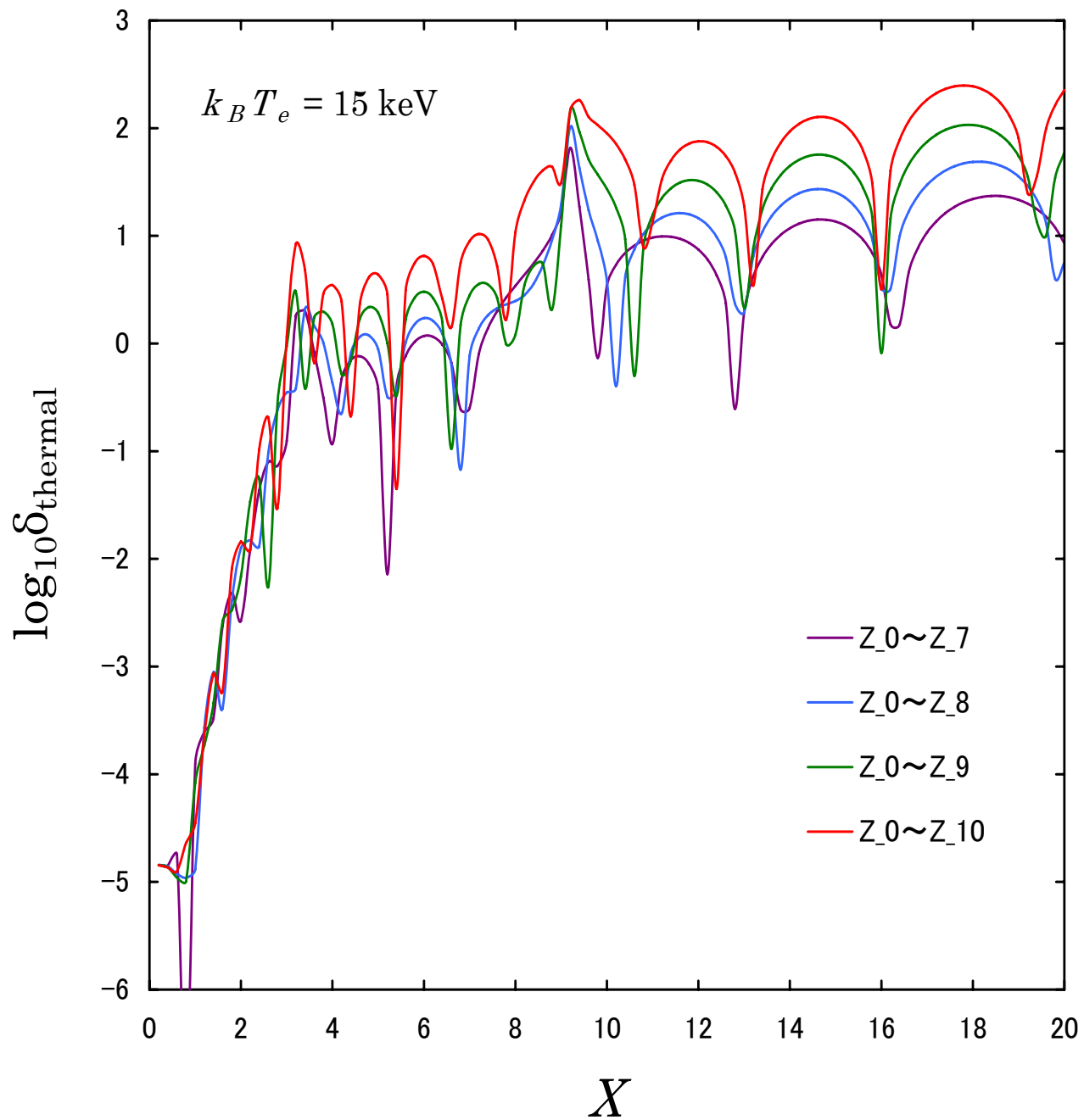


図 2.53: 15 keV の場合で、数値積分に対する、 $Z_0 \sim Z_7$ 、 $Z_0 \sim Z_8$ 、 $Z_0 \sim Z_9$ 、 $Z_0 \sim Z_{10}$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ。

## 2.6 熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のまとめ

この章では、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果について記述した。この効果は、低エネルギー側では強度が減少し、高エネルギー側では強度が増加するという特性を持っている。また、一般的な銀河団の温度  $k_B T_e = 10$  keV と典型的な銀河団の光学的深さ  $\tau = 0.01$  である場合で、この効果を温度に換算すると、 $\Delta T \sim -10^{-3}$  K となる。よって、 $T_0 \simeq 2.726$  K に対して、mK のオーダーの温度揺らぎである。

非相対論的計算による熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と相対論的計算による熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を計算した。図 2.2 から、高周波側且つ高温では相対論的補正の効果が顕著に表れていた。さらに、クロスオーバー周波数の温度依存性の寄与から、相対論的補正をしないことによる周波数のズレが運動学的スニャエフゼルドビッチ効果に致命的な打撃を与えることが分かった。

相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式を導出した。数値積分による厳密解との相対誤差は、低周波数領域では収束しているから、展開計算が正しく行われていることが示された。周波数の各領域ごとに精度を確かめてみると、クロスオーバー周波数付近では、誤差が比較的大きくなっているが、その領域は、熱的スニャエフゼルドビッチ効果の値がゼロに近づく領域であることが原因である。そして、低周波数領域に対し、高周波数領域では、精度が悪くなっていることが分かる。銀河団の温度に対する精度の動きを調べた結果、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、 $X \leq 15$  ( $\nu \leq 853$  GHz) の範囲で約 1% 以内に収まっている。そして、15 keV の場合は、高周波数側で近似が悪くなっている。 $X \leq 10$  ( $\nu \leq 568$  GHz) の範囲では、部分的に 1% ラインを割っているのだが、約 1% 以内に収まっている。結果として、我々の展開式は、精度としては大変有効であると考えられる。

さらに高次の展開をした場合についても調べてみた。銀河団温度が 5 keV と 10 keV の場合は、より高次の項まで展開した方が厳密解との誤差が小さくなる傾向を示している。そして、15 keV の場合でも、低周波数側では高次まで展開した方が厳密解との誤差が小さくなる傾向を示しているが、高周波数側では、むしろ微小に誤差が大きくなっている領域がある。数値積分による厳密解との相対誤差は、低周波数領域では、かなりの精度で厳密解と一致している事がわかる。次にクロスオーバー周波数付近である  $X = 4$  辺りの領域を見てみると、やはり誤差が大きくなっているが、p.62 の図 2.11 と比べると、精度の悪化が抑えられている。最後に  $X > 4$  の高周波数領域を見てみると、特に高温の場合に展開式は非常に収束が遅く、低周波数領域と比べると、精度が落ちてしまっている。銀河団の温度に対する精度の動きを調べた結果、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、 $X \leq 15$  ( $\nu \leq 853$  GHz) の範囲で約 1% 以内に収まっている。そして、15 keV の場合は、高周波数側で近似が悪くなっている。 $X \leq 11$  ( $\nu \leq 625$  GHz) の範囲では、約 1% 以内に収まっている。高周波数側で近似が悪くなる傾向は同じだが、62 の図 2.11 の結果に比べると、全体的に精度が増していることが分かる。結果としては、展開式の精度としては大変有効であると考えられるが、解析式が長いという欠点がある。

1 回散乱の効果に続き、2 回散乱の効果調べてみたところ、次のような結果が得られた。図 2.34 から、高周波側且つ高温では相対論的補正の効果が顕著に表れていた。この効果は、光学的深さや電子温度など、現実的な銀河団のパラメータを考慮すると、かなり小さい値になると思われる。さらに、図 2.32 から、 $0 \leq X \leq 15$  の領域の 2 回散乱成分は、1 回散乱に対して全体的に  $|\Gamma| < 0.5\%$  以下の寄与を与えるぐらいであり、現状としては、2 回散乱成分による揺らぎの補正を考慮する必要性は薄いと考えられる。銀河団の温度に対する精度の動きを調べた結果、銀河団の温度が低温の場合は、 $X \lesssim 15$  ( $\nu \lesssim 853$  GHz) の領域全体で精度が良く、より高次の項まで含めた方が、高精度の数値結果が得られた。一方、銀河団の温度が高温の場合は、 $X \lesssim 2.5$  ( $\nu \lesssim 142$  GHz) の領域では、誤差が 1% 以内に収まったが、それより高周波数側では精度が悪く、

さらに高次の項を含めても精度が向上しないか、あるいは、逆に精度が悪化するという結果が得られた。しかも、10 keV と 15 keV の精度を比較から、高温になるにつれて、展開次数を上げることによる精度の悪化レベルが激しくなっていくことが分かった。これらの解析から、結果として、展開式の精度としては有効とは言えない精度であるが、そもそも、2 回散乱の寄与は大変小さく、無視しても差し支えないと考えられる。

## 第3章 運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

### 3.1 はじめに

この章では、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算について述べていく。運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果は、宇宙背景放射に対する銀河団の固有運動によって生じる、宇宙背景放射の分布の歪みである。運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の数式については、Sunyaev と Zeldovich [5] によって1980年に非相対論の極限で導き出された。1998年に、Tuckerら [7] は、電子温度  $T_e = 17.4 \pm 2.5 \text{keV}$  の銀河団を発見したことを受けて、Rephaeliらはスニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算には相対論的補正が重要であることを認識し、その先駆的研究を行った。一方、伊藤、神山、野澤 [8] は、銀河団に静止した座標系をとり、コンプトン散乱の過程を記述することにより相対論的補正を考慮した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を計算した。それをさらに、野澤、伊藤、神山 [9] は、それを運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果へ応用して、展開式を導くことに成功した。しかし、数値積分を用いた展開式の精度確認は、されていなかった。ここでは、野澤らによって用いられた方法を用いて解析式の導出を行うとともに、数値積分による厳密解の計算結果を用いて、解析式の精度についての結果と考察を記す。運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測の現状では、誤差が数百%もある状況 ([20] で発表されている固有速度の観測誤差を参照した。) であるが、近い将来、高精度の測定が期待される観測機が完成予定であり、精度の良い観測結果が期待されている。運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を観測するには、クロスオーバー周波数付近の観測が重要になる。これまでの議論と同様に、この周波数を織り交ぜて議論していく。

この章の流れは、3.2: 非相対論的に計算した運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算、3.3: 相対論的に計算した運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算 (詳細な計算は付録 C)、そして、3.4: Shimon & Rephaeli の運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算結果との比較をする。最後に、展開式の評価結果やそれに対する考察を述べる。

### 3.2 非相対論的に計算した運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

#### 3.2.1 運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算

ここでは非相対論的に計算する運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を記述する。以下で用いる、添え字  $C$  を用いて銀河団系を表すとする。

まず、銀河団と観測者を同一の  $x-z$  平面上に置いて、両者を結ぶ線分を  $z$  軸とし、観測者方向を  $z$  軸の正の方向とする。入射する光子 (宇宙背景放射) の運動量ベクトルを  $k$  とし、 $z$  軸の正の方向を向いているように設定する。自然単位系 ( $c = 1$ ) を用いると、 $\omega = ck = k$  であるから、

$$\mathbf{k} = \omega (0, 0, 1) \tag{3.1}$$

と表わせる。

ここで、入射光子は、角周波数  $\omega$ 、温度  $T_0$  のプランク分布：

$$n_0(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T_0} - 1} \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{e^X - 1} \quad (3.3)$$

$$X \equiv \frac{\hbar\omega}{k_B T_0} \quad (3.4)$$

をしていると近似すると、入射光子の分布関数  $n(\omega)$  は、

$$n(\omega) = \frac{1}{e^X - 1} \quad (3.5)$$

である。銀河団は、 $x - z$  平面上を CMB 系に対して固有速度  $v$  で運動しており、 $z$  軸と角度  $\theta_\gamma$  を成しているとする。

固有速度の無次元量として、

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \quad (3.6)$$

$$\beta = \beta (\sin \theta_\gamma, 0, \cos \theta_\gamma) \quad (3.7)$$

と定義しておく。

さて、ローレンツ変換を考えると、

$$n(\omega) = n_C(\omega_C) \quad (3.8)$$

$$\omega_C = \gamma(\omega - \beta \cdot \mathbf{k}) \quad (3.9)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.10)$$

が成り立つ ( $\gamma$  はローレンツファクターである)。ここで、 $\beta \ll 1$  を考慮して、 $\beta$  の 1 次で展開すると、

$$\gamma \approx 1 \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} n_C(\omega_C) &= \frac{1}{e^{\hbar\omega_C/k_B T_0} - 1} \\ &= \frac{1}{e^{\hbar\gamma(\omega - \beta \cdot \mathbf{k})/k_B T_0} - 1} \\ &\approx \frac{1}{e^{X(1 - \beta \cdot \hat{\mathbf{k}})} - 1} \\ &\approx n(\omega) + \frac{X e^X}{(e^X - 1)^2} \beta \cdot \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

となる。ここで、 $\hat{\mathbf{k}}$  は光子の単位方向ベクトルを表す。銀河団の光学的深さを  $\tau$  とし、光子分布関数の変化分を求めると、

$$\begin{aligned} \Delta n &= \tau [n_C(\omega_C) - n(\omega)] \\ &= \frac{X e^X}{(e^X - 1)^2} \tau \beta \cdot \hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{X e^X}{(e^X - 1)^2} \tau \beta \cos \theta_\gamma \end{aligned} \quad (3.13)$$



と表す事が出来る。これをプランク分布で割って、相対的な分布変化を求める。強度変化として、プランクの黒体放射より

$$\Delta I = \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n}{n_0} \quad (3.14)$$

と定義する。

これを、観測によって決まる量である光学的深さ  $\tau$  で割って  $\Delta I/\tau$  を運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を表わす量と定義する。

### 3.2.2 運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の特性

運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と共にグラフにしたものを図 3.1 に示す。実際に観測される量は、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の重ね合わせである。グラフからもわかるように、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に対して、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果による強度の歪みは小さいが、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果が現れないクロスオーバー周波数でピークを持つため、観測精度が上がれば、十分に観測できると考えられる。この効果の正確な観測により、銀河団の固有速度の視線方向成分を知る事ができる。相対的な分布変化のレイリー・ジーンズ極限 ( $X \rightarrow 0$ ) をとることで、相対的な温度変化を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T_0} &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{n_0} \\ &= \tau \beta \cos \theta_\gamma \end{aligned} \quad (3.15)$$

である。値を代入して、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の寄与  $\Delta T$  はどれくらいかを評価してみる。まず、銀河団が  $z$  軸 (視線方向) に沿って近づいてくる場合、その速度を典型的な値として、 $v = 1000 \text{ km s}^{-1}$ 、 $\tau = 0.01$  を代入する。温度  $T_0$  は宇宙背景放射の温度であり、 $T_0 = 2.726 \text{ K}$  を代入して計算すると、 $\Delta T \sim 10^{-4} \text{ K}$  となる。よって、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に比べて一桁程小さい効果であることがわかる。

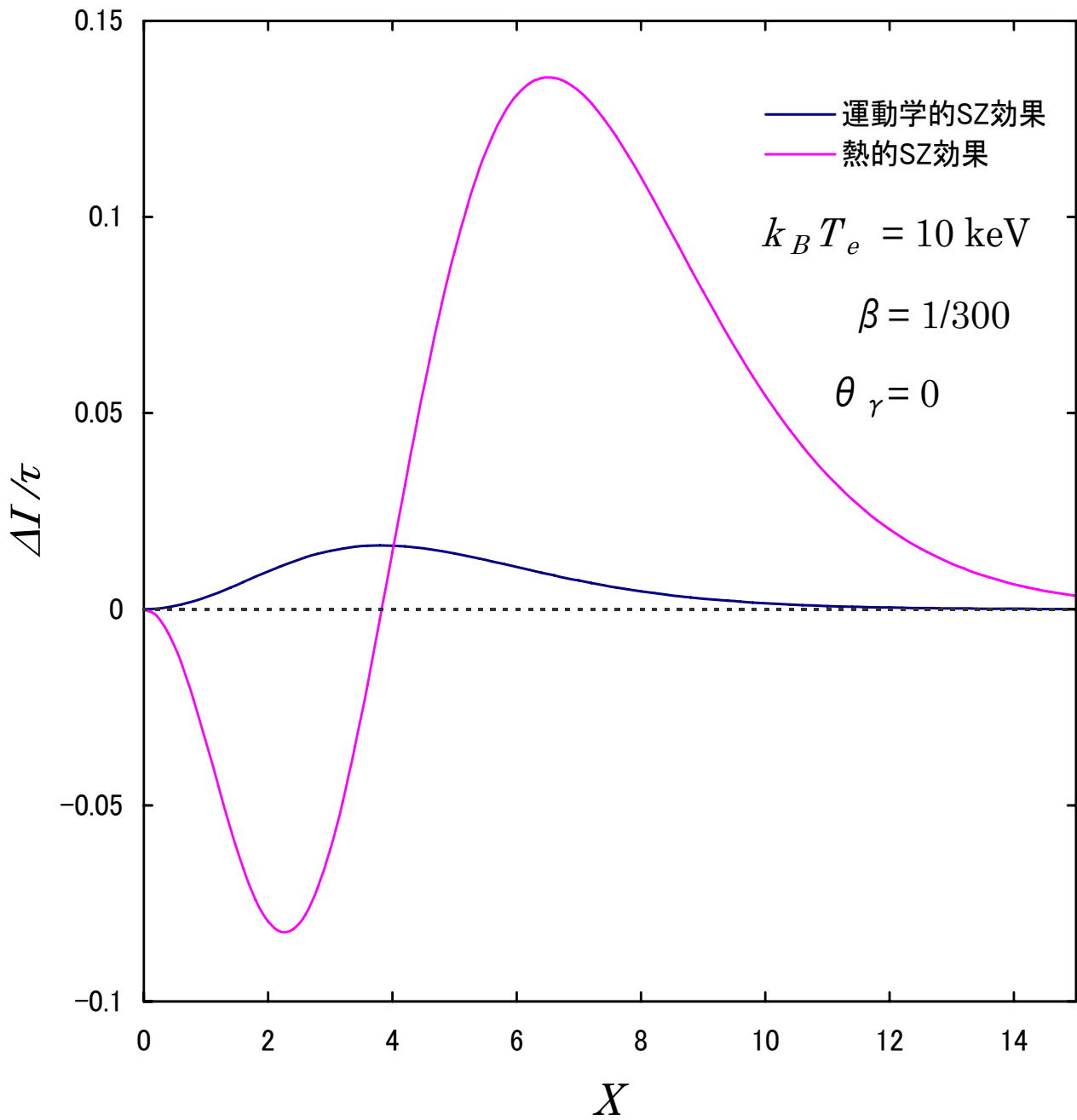


図 3.1: 熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に対する運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のグラフ。

### 3.3 相対論的に計算した運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

#### 3.3.1 ボルツマン方程式

ここでは、相対論的に計算した運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果について記述する。

運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果は、銀河団の固有速度  $v$  によって生じる宇宙背景放射の歪みである。運動学的効果に関しては、1998年に野澤、伊藤、神山 [9] によって、 $O(\beta\theta_e^2)$ 、 $O(\beta^2\theta_e)$  の項まで計算されている。

近い将来、高い精度の観測が期待されているので、より精度の高い解析式を導出する価値は十分にあると考えられる。

ここでの運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算に関しては、前章での熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算をそのまま発展させている。すなわち、CMB系での光子の分布関数  $n(\omega)$  に対する時間発展の方程式は、2.3で扱った(2.31)式を応用している。銀河団と観測者の位置関係や入射光子ベクトルの方向、そして銀河団の固有速度については、前節3.2の設定と同じである。

始状態と終状態の電子の分布関数は、銀河団の系においてフェルミ統計に従う。CMB系では、以下の式に従って変換される。

$$f(E) = f_C(E_C) \quad (3.16)$$

$$f(E') = f_C(E'_C) \quad (3.17)$$

$$E_C = \gamma(E - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}) \quad (3.18)$$

$$E'_C = \gamma(E - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}') \quad (3.19)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.20)$$

ここで下付きの  $C$  は銀河団系を意味する。

さて、電子の分布関数を相対論的マクスウェル分布で近似する。すると、電子が温度  $T_e$  を持つ時、

$$\begin{aligned} f_C(E_C) &= (e^{[(E_C - m) - (\mu_C - m)]/k_B T_e} + 1)^{-1} \\ &\approx e^{-[(E_C - m) - (\mu_C - m)]/k_B T_e} \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。さらに、散乱前後でのエネルギー保存則を

$$f_C(E'_C) \approx e^{\Delta x \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}}')} e^{x \gamma \boldsymbol{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')} f_C(E_C) \quad (3.22)$$

$$x \equiv \frac{\hbar \omega}{k_B T_e} \quad (3.23)$$

$$\Delta x = \frac{\hbar(\omega' - \omega)}{k_B T_e} \quad (3.24)$$

となる。これらの式を用いると、ボルツマン方程式は、

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_C(E_C) \{n(\omega)[1 + n(\omega')]\}$$

$$-n(\omega')[1+n(\omega)]e^{\Delta x\gamma(1-\beta\cdot\hat{\mathbf{k}}')}e^{x\gamma\beta\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}')}\} \quad (3.25)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{k}}$ 、 $\hat{\mathbf{k}}'$  はそれぞれ、 $k$ 、 $k'$  の方向における単位ベクトルである。(3.25) 式は、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を考える上での基本の式となる。

次に熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の場合と同様に、 $\Delta x \ll 1$  として  $n(\omega')$  と  $\Delta x$  の指数関数を展開する。これをまとめると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= 2 \left[ \frac{\partial n}{\partial x} I_{1,0} + n(1+n) I_{1,1} \right] \\ &+ 2 \left[ \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} I_{2,0} + 2(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} I_{2,1} + n(1+n) I_{2,2} \right] \\ &+ 2 \left[ \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} I_{3,0} + 3(1+n) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} I_{3,1} + 3(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} I_{3,2} + n(1+n) I_{3,3} \right] \\ &+ \dots \\ &+ 2n \left[ (1+n) J_0 + \frac{\partial n}{\partial x} J_1 + \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} J_2 + \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} J_3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

となる。ここで、

$$I_{k,l} \equiv \frac{1}{k!} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_C(E_C) (\Delta x)^k e^{x\gamma\beta\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}')} \gamma^l (1-\beta\cdot\hat{\mathbf{k}}')^l \quad (3.27)$$

$$J_k \equiv -\frac{1}{k!} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_C(E_C) (\Delta x)^k (1 - e^{x\gamma\beta\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}')}) \quad (3.28)$$

となっている。 $I_{k,l}$ 、 $J_k$  について  $O(\theta_e^5)$ 、 $O(\beta^2)$  まで正確に計算する。また、ここでも CMB 光子の初期分布を温度  $T_0$  のプランク分布：

$$n_0(X) = \frac{1}{e^X - 1} \quad (3.29)$$

$$X \equiv \frac{\hbar\omega}{k_B T_0} \quad (3.30)$$

で近似し、3.26 に代入し、 $T_0/T_e \ll 1$  として計算し、プランク分布で規格化して、相対的分布変化の展開式として、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{n_0} &= \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \theta_e [Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4] \\ &+ \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \beta^2 [B_0 + \theta_e B_1 + \theta_e^2 B_2 + \theta_e^3 B_3] \\ &+ \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \beta P_1(\cos \theta_\gamma) [C_0 + \theta_e C_1 + \theta_e^2 C_2 + \theta_e^3 C_3 + \theta_e^4 C_4] \\ &+ \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \beta^2 P_2(\cos \theta_\gamma) [D_0 + \theta_e D_1 + \theta_e^2 D_2 + \theta_e^3 D_3] \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\tau \equiv \sigma_T \int dl N_e \quad (3.32)$$

$$\theta_e \equiv \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \quad (3.33)$$

$$\cos \theta_\gamma = \frac{\beta_z}{\beta} \quad (3.34)$$

$$P_1(\cos \theta_\gamma) = \cos \theta_\gamma \quad (3.35)$$

$$P_2(\cos \theta_\gamma) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta_\gamma - 1) \quad (3.36)$$

という形式にまとめられる。 $B_0 \sim B_3$ 、 $C_0 \sim C_4$ 、 $D_0 \sim D_3$ 、までの項の計算結果については、??の (C.98) 式 ~ (C.110) 式として掲載されている。

ここで  $\theta_\gamma$  は、銀河団の特異速度  $\beta = v/c$  と  $z$  軸に取った光子の運動量  $k$  との間のなす角を表す。

さて、ここで、散乱前後の光子の数が変化しない事が重要であるが、 $Y_0$  から  $Y_4$  まで全てで光子数の変化

$$\int dX X^2 \Delta n(X) \quad (3.37)$$

を求めると、この積分値が解析的に全て 0 になり、光子数が保存する。この事は前章でも述べたが、この積分で、(3.31) 式の一行目と二行目が、消える事が分かる。一方で、三行目と四行目は、 $P_1(\cos \theta_\gamma)$  または、 $P_2(\cos \theta_\gamma)$  に比例している。つまり、これらの項は、立体角積分:  $\int d\Omega_\gamma$  によって、それぞれ独立に消える事がわかる。

最後に実際に観測されるスペクトルの強度変化として、

$$\Delta I = \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n(X)}{n_0(X)} \quad (3.38)$$

と定義しておく。

これを、観測によって決まる量である光学的深さ  $\tau$  で割って  $\Delta I/\tau$  を熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を表わすグラフと定義し、それを用いてグラフの比較等の操作を行っていく。

### 3.3.2 運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の特性

観測の際にとっても重要となる特性が、クロスオーバー周波数で極値をとることである。また、銀河団の固有速度の視線方向成分が観測者の方向を向いている場合、周波数全域で正の値をとり、視線方向成分が観測者と反対側を向いている場合は、周波数全域で負の値をとるという特徴がある。例として、図 3.2 のような配置で、ある銀河団における運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測を考えると考える。そのとき、銀河団の固有速度ベクトルと、銀河団と観測者を結ぶ線分との角度に依存して、図 3.3 のような結果を得る。このことから、

1. 固有速度の視線方向成分が観測者の方向を向いている場合は正、逆方向を向いている場合は負になる。
2. 固有速度に対して垂直の方向は、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の大きさがゼロである。
3. 視線方向成分の大きさに比例して、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の大きさが増加している。

ということが分かる。

今度は、銀河団の温度  $k_B T_e = 5 \text{ keV}$ 、 $10 \text{ keV}$ 、 $15 \text{ keV}$  の場合の運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のグラフを重ね合わせたものを図 3.4 に示す。グラフを見ると、低周波数側では、銀河団の温度が低温であるほど効果が大きく、約  $X \sim 5.5$  ( $\nu \sim 300 \text{ GHz}$ ) を超えると、銀河団の温度が高温であるほど効果が大きくなるという特徴が表れている。

### 3.3.3 相対論的補正の重要性

展開式の話に移る前に、この数値積分による厳密解を用いて相対論的補正の必要性を確認してみる。すなわち、非相対論的に計算した結果と相対論的に計算した結果の比較を行う。図 3.5 を見ればすぐに相対論的效果が無視出来ないことが分かる。特に、高周波側では、相対論的補正による差が顕著に出ていることが分かる。また、(3.31) 式の  $C_0$  の項を見れば分かるとおり、非相対論的に求められる運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果は銀河団の温度 ( $\theta_e$ ) に依存しないため、グラフに表れているように、銀河団が高温になるにつれて、全体的に相対論的補正の寄与が大きくなっていることが分かる。

特に、相対論の場合、クロスオーバー周波数が温度依存性をもっている (p.49)。非相対論でのクロスオーバー周波数と相対論でのクロスオーバー周波数の誤差によって、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果にどれだけ影響を与えるのかを調べてみる。すなわち、非相対論的に求めた熱的スニャエフゼルドビッチ効果のクロスオーバー周波数  $218 \text{ GHz}$  ( $X \simeq 3.830$ ) の値に周波数を固定し、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の値と熱的スニャエフゼルドビッチ効果の値の比較をする。ここで、

$$f \equiv \frac{\Delta I_{\text{thermal}}}{\Delta I_{\text{kinematic}}} \quad (3.39)$$

という量を定義して、 $X = 3.83$  を代入して計算する。銀河団の温度が  $1 \text{ keV} \sim 20 \text{ keV}$  の範囲で求めた結果を図 3.6 に示す。このグラフから、銀河団が高温になるにつれ、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果がもつ値の寄与が大きくなる。運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を観測する時には、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果がゼロになるところでなければ、観測が非常に難しいため、クロスオーバー周波数の位置を正しく求めなくてはならない。また、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果は熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に比べ、現れる効果が格段に小さいので、たとえ、 $5 \text{ keV}$  の場合に生じる  $2 \text{ GHz}$  の差であっても、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に対して強く影響を及ぼす。相対論的補正はこの先、観測機器の発達に伴って、非常に重要なものになってくると考えられる。

### 3.3.4 運動学的スニャエフゼルドビッチ効果の寄与

前節 3.2 で、大体のオーダーを計算したのだが、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に対する運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の寄与を調べるために、双方の数値積分結果を用いて比を計算する。以下のように定義を行う。

$$f \equiv \left| \frac{\Delta I_{\text{kinematic}}}{\Delta I_{\text{thermal}}} \right| \quad (3.40)$$

これを  $0 \leq X \leq 15$  の範囲で計算した結果を、 $k_B T_e = 5 \text{ keV}$ 、 $10 \text{ keV}$ 、 $15 \text{ keV}$  の場合で重ね合わせたグラフを図 3.7 に示す。

そのグラフを見ると、5 keV の場合、クロスオーバー周波数付近を除いて  $0 \leq X \leq 15$  の領域で、約 10% 以下の寄与しかないことが分かる。しかし、銀河団が高温になるにつれて、運動学的スニャエフゼルドビッチ効果の寄与が少しずつ増大している様子が見られる。

### 3.3.5 展開式の精度

#### 比較計算及び比較する範囲

展開式の性質を調べるために、銀河団の温度、周波数、展開次数などの計算条件を変えて、数値積分の結果と展開計算の結果を比較し、精度を評価した。銀河団の温度と周波数範囲については、 $5 \leq k_B T_e \leq 15$  である。また、銀河団の固有速度ベクトルは観測者の方向を向いており、その大きさは、 $1000 \text{ km/s} (\beta = 1/300)$  として計算する。

また、比較には、数値積分との相対誤差：

$$\delta_{\text{kinematic}} \equiv \left| \frac{(\Delta I)_{\text{analytic}} - (\Delta I)_{\text{numerical}}}{(\Delta I)_{\text{numerical}}} \right| \quad (3.41)$$

を定義して計算する。

#### 展開次数と精度の動き

展開次数を増やしていくとどのようになるかを、銀河団の温度ごとに調べる。すなわち、 $O(\beta\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e^2)$  及び  $O(\beta^2\theta_e)$ 、 $O(\beta\theta_e^3)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^2)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^3)$  までの項を取り入れた展開式の精度の変化を、銀河団の温度ごとに調べる。

#### 銀河団温度 5 keV

展開計算と数値積分のグラフを重ねたものを図 3.8 に示し、数値積分に対するそれぞれの展開式の誤差曲線を重ねたものを図 3.9 に示す。これらのグラフから、次のような考察ができる。

$X < 4$  の低周波数側では、高次の項までの展開により、飛躍的な精度の向上が見られる。特に、非相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に対応する  $Y_0$  までの展開式の精度と比べ、より高次の項を含めることにより、精度の大幅な向上が見られている。また、クロスオーバー周波数付近 ( $X \sim 4$ ) の精度も、展開により、精度の向上が見られる。 $X > 4$  の高周波数側では、より高次の項まで展開した方が、厳密解との誤差が小さくなる傾向を示している。

#### 銀河団温度 10 keV

展開計算と数値積分のグラフを重ねたものを図 3.10 に示し、数値積分に対するそれぞれの展開式の誤差曲線を重ねたものを図 3.11 に示す。これらのグラフから、次のような考察ができる。

銀河団の温度が 5 keV の場合と同様の性質を示している。 $X < 4$  の低周波数側では、高次の項までの展開により、飛躍的な精度の向上が見られる。クロスオーバー周波数付近は、より高次の展開により、精度の向上が見られる。 $X > 4$  の高周波数側では、より高次の項まで展開した方が、厳密解との誤差が小さくなる傾向を示している。

## 銀河団温度 15 keV

展開計算と数値積分のグラフを重ねたものを図 3.12 に示し、数値積分に対するそれぞれの展開式の誤差曲線を重ねたものを図 3.13 に示す。これらのグラフから、次のような考察ができる。

$X < 4$  の低周波数側では、高次の項までの展開により、飛躍的な精度の向上が見られる。クロスオーバー周波数付近は、より高次の展開により、精度の向上が見られる。 $X > 4$  の高周波数側では、かなり高周波数側では、展開次数を上げてほとんど誤差が向上していない部分があるが、高次の項までの展開により、大部分の領域で厳密解との誤差が小さくなる傾向を示している。

全体的な傾向として、高次の項を取り入れることにより、厳密な値に近付いていくことが分かる。これら結果は、高次の項を取り入れることが重要であることを示している。

そして、横軸に銀河団の温度をとり、周波数の値をクロスオーバー周波数の位置に固定して、数値積分と各次数の展開計算の運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を重ね合わせたものを図 3.14 に示す。ここで、クロスオーバー周波数の値は、伊藤、神山、野澤 [8] により計算されたフィッティング式：

$$X_0 = 3.830(1 + 1.167\theta_e - 0.8533\theta_e^2)$$

この結果から、高次の項を取り入れることにより、厳密な値に近付いていくことが分かる。さらに、銀河団が高温になるにつれて、より低い次数の展開計算ほど厳密な値から離れていく様子が分かる。この結果は、少なくともここで調べた範囲内では、高次の項を取り入れることが重要であることを示している。

次以降の評価では、 $O(\beta\theta_e^4)$ 、 $O(\beta^2\theta_e^3)$  までの項を取り入れた展開式を用いて行う。

## 銀河団の温度に対する展開式の精度

$O(\beta\theta_e^4)$ 、 $O(\beta^2\theta_e^3)$  までの項を取り入れた展開計算の数値積分に対する誤差を (3.41) 式により計算する。 $k_B T_e = 5$  keV、10 keV、15 keV の場合で重ね合わせたグラフを図 3.15 に示す。

電子の温度が大きくなると誤差が大きくなる様子が表れている。この展開計算は無次元温度の漸近展開で近似計算しており、高温になるにつれて、その近似は有効ではなくなるために誤差が悪くなると考えられる。

今度は、周波数領域別で精度を確認してみる。まず、レイリー・ジーンズ領域を考える。特に、 $X$  が 0 に近い部分を見ると  $\delta$  の値は、どの温度の場合でも  $10^{-5}$  以下とかなりの精度で厳密解と一致している事がわかる。この点からもこの展開式の正しさが理解できる。

次にクロスオーバー周波数付近である  $X = 4$  周辺の領域を見てみる。この領域は、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を観測する上で非常に重要な領域になる。この領域では、どの温度の場合でも 1% 以下という高精度の結果が出ている。

最後に  $X > 4$  のウィーン領域を見てみる。この領域において、展開式は非常に収束が遅く、レイリー・ジーンズ領域と比べると、かなり精度が落ちてしまっている。しかし、この領域では運動学的効果は、熱的效果と比べるとほとんど値を持たない。つまり、高周波数側で精度が落ちている事は、実際の観測データの解析の際、全く影響がないと考えられる。

それぞれの温度での誤差の程度について確認してみると、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、 $X \leq 15$  ( $\nu \leq 853$  GHz) の範囲で約 1% 以内に収まっている。そして、15 keV の場合は、高周波数側で近似が悪くなっている。 $X \leq 9$  ( $\nu \leq 512$  GHz) の範囲では、部分的に 1% ラインを割っているのだが、約 1% 以内に収まっている。



## 比較結果のまとめ

展開次数を増加させると、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、定められた周波数域の全域において、精度の向上が見られる。さらに、銀河団の温度が 15 keV の場合でも、極めて高周波数である領域を除いて、精度の向上が見られる。結果から、高次の項を含めることの重要性がうかがえる。

そして、 $O(\beta\theta_e^4)$ 、 $O(\beta^2\theta_e^3)$  までの項を取り入れた展開計算の精度は、高温になるにつれて精度が悪くなる傾向を示している。それぞれの温度での誤差の程度について確認してみると、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、 $\nu \leq 15 (\leq 853 \text{ GHz})$  の範囲で約 1% 以内に収まっている。そして、15 keV の場合は、高周波数側で近似が悪くなっている。 $\nu \leq 9 (\leq 512 \text{ GHz})$  の範囲では、部分的に 1% ラインを割っているのだが、約 1% 以内に収まっている。

総合結果として、我々の展開式は、精度としては大変有効であると考えられる。

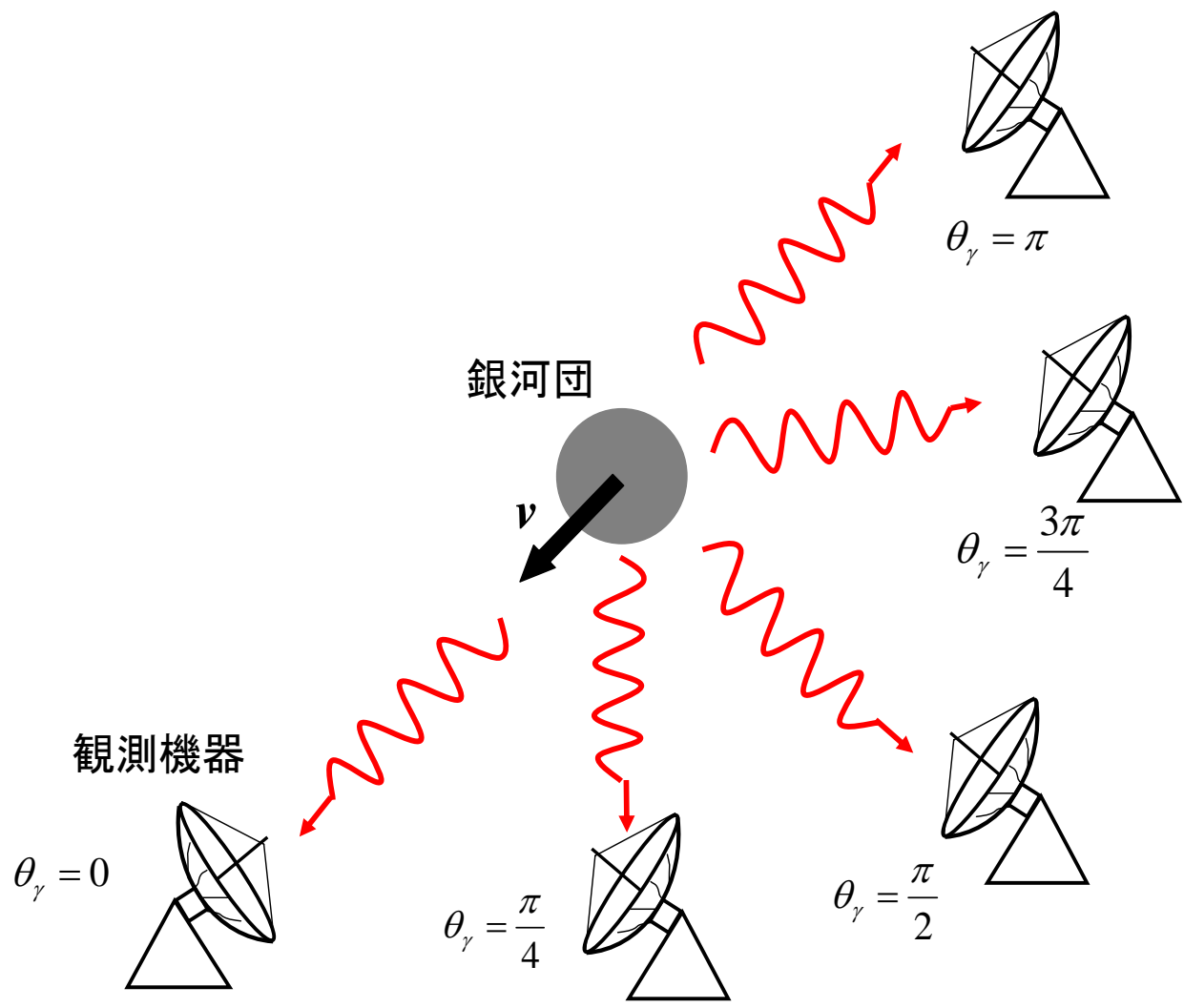


図 3.2: ある銀河団と観測者が成す角度  $\theta_\gamma$  が  $0 \leq \theta_\gamma \leq \pi$  の範囲で変化する場合を想定した概念図。

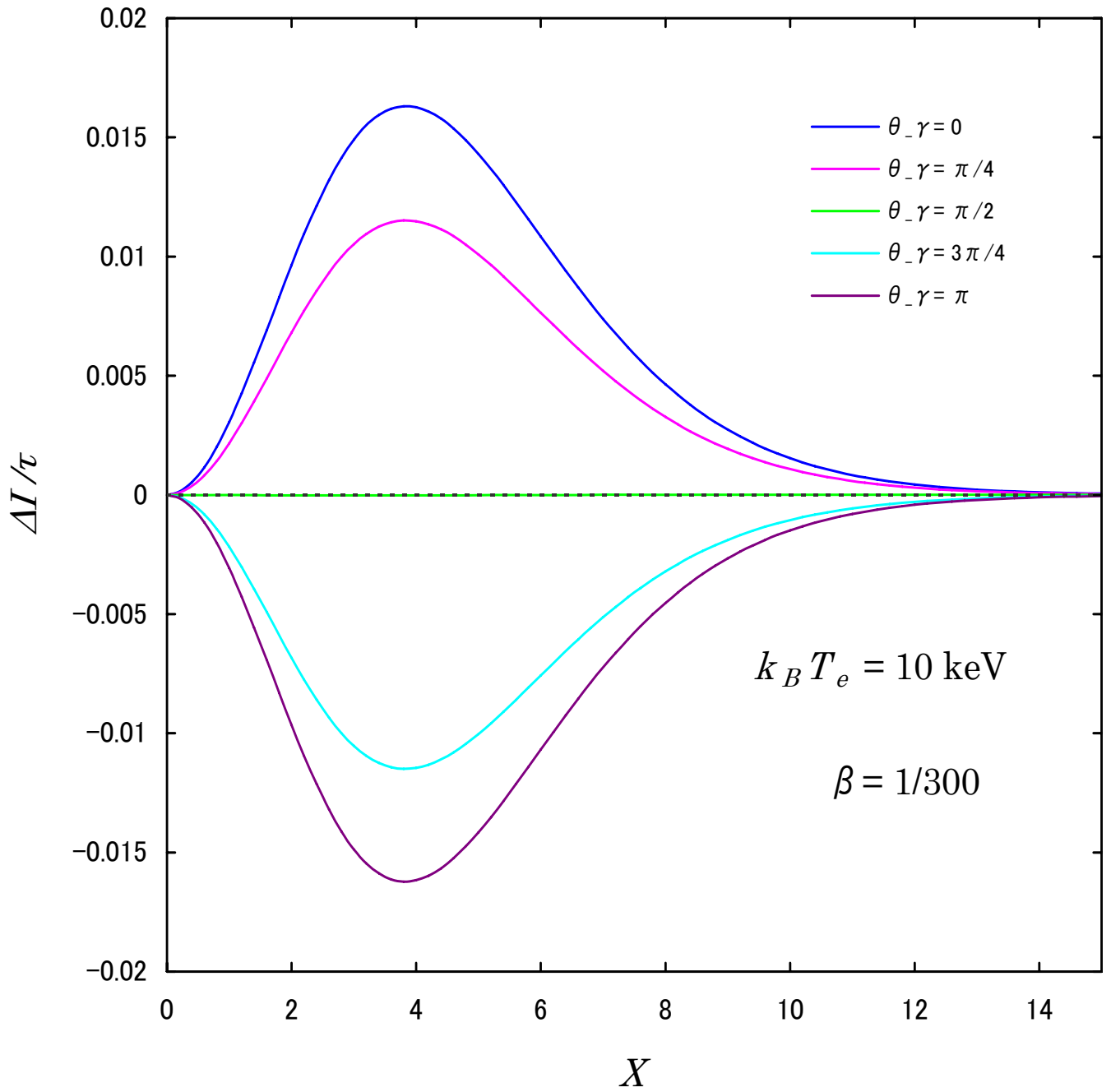


図 3.3: ある銀河団と観測者が成す角度  $\theta_\gamma$  が  $0 \leq \theta_\gamma \leq \pi$  の範囲で変化する場合について計算した運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のグラフ。

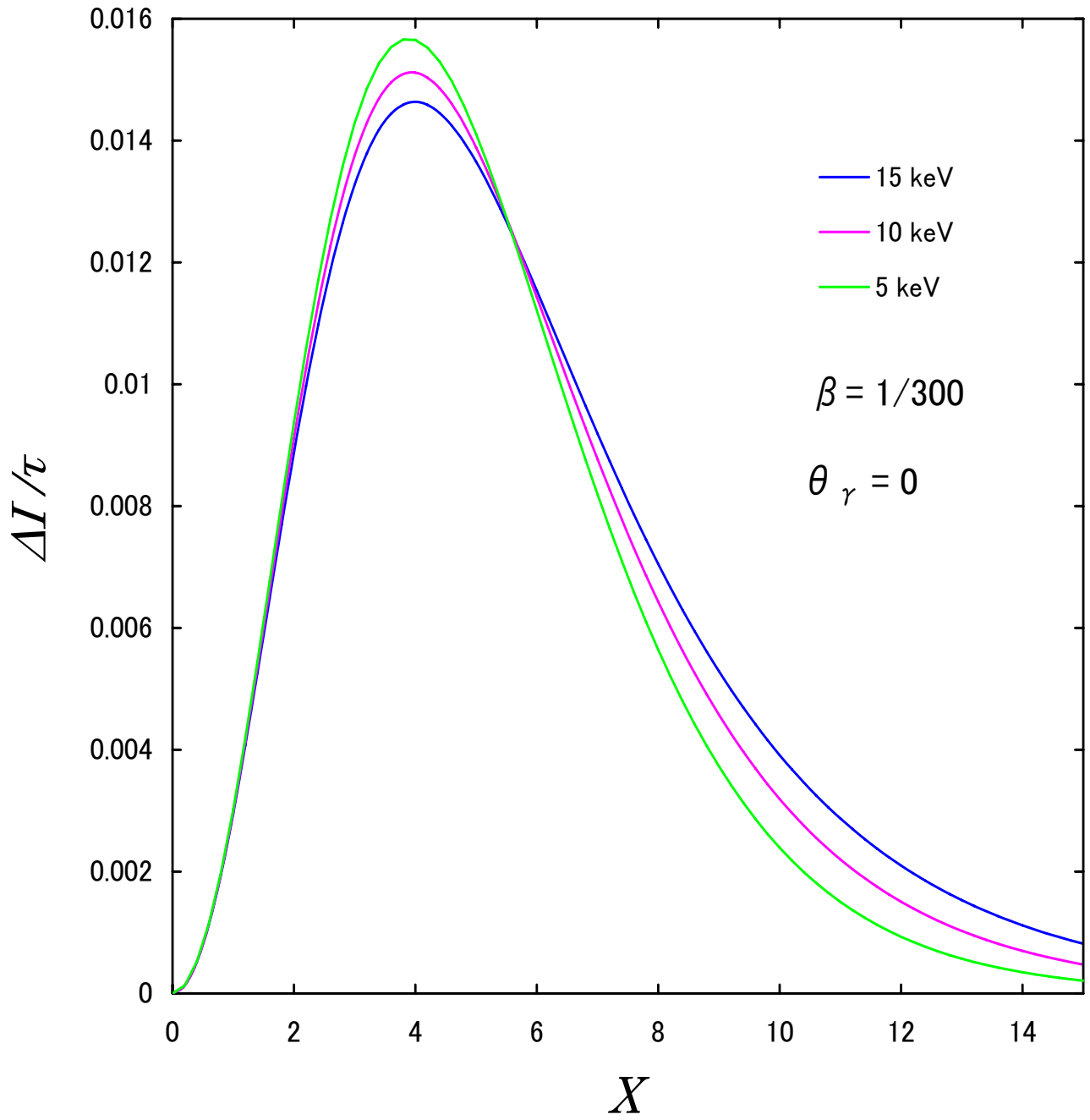


図 3.4: 銀河団の温度  $k_B T_e = 5$  keV、10 keV、15 keV の場合の運動学的スニャエフゼルドピッチ効果のグラフを重ね合わせたグラフ。

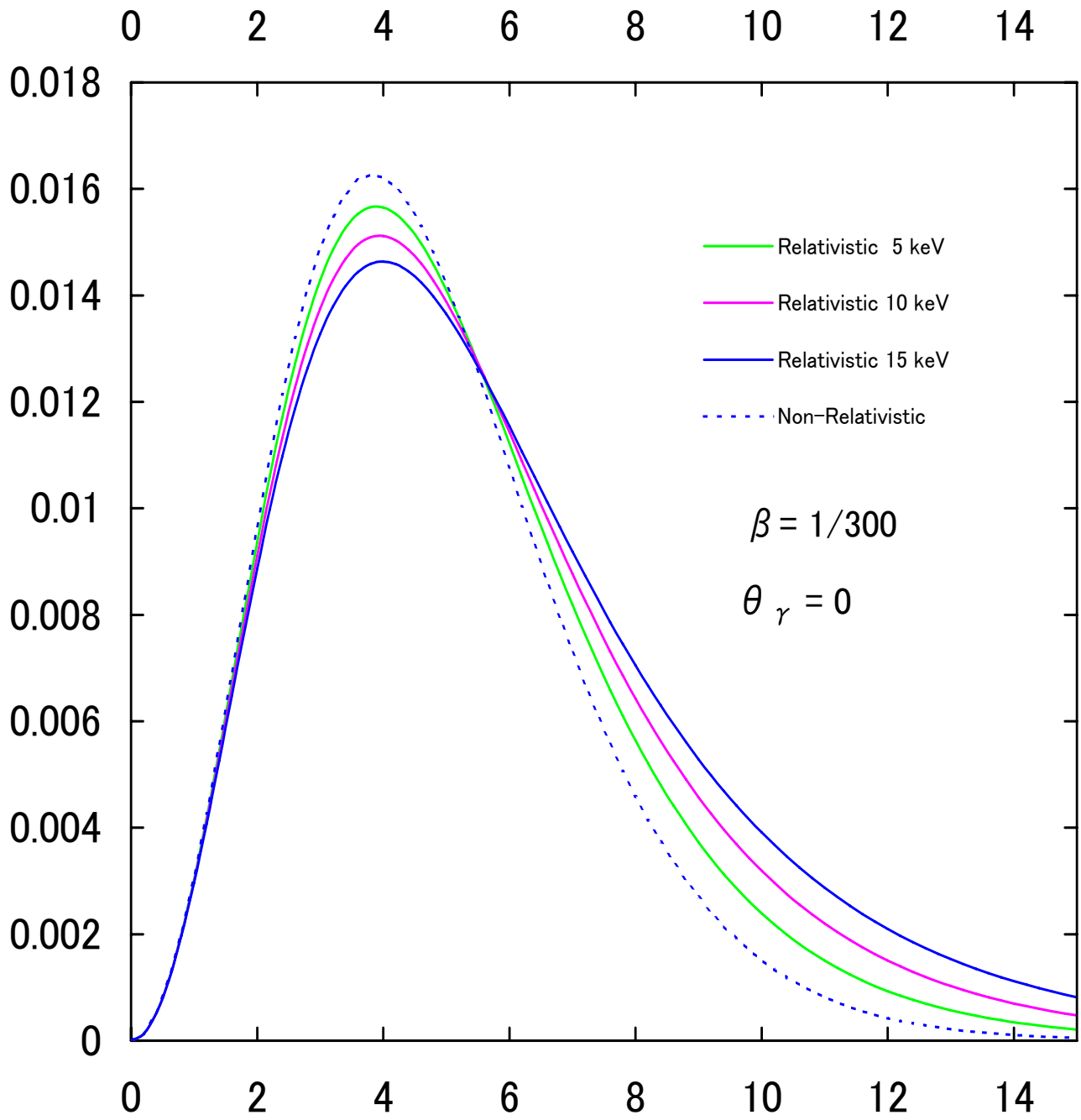


図 3.5: 銀河団の温度  $k_B T_e = 5 \text{ keV}$ 、 $10 \text{ keV}$ 、 $15 \text{ keV}$  の場合について、非相対論的に計算した結果と相対論的に計算した結果を重ね合わせたグラフ。

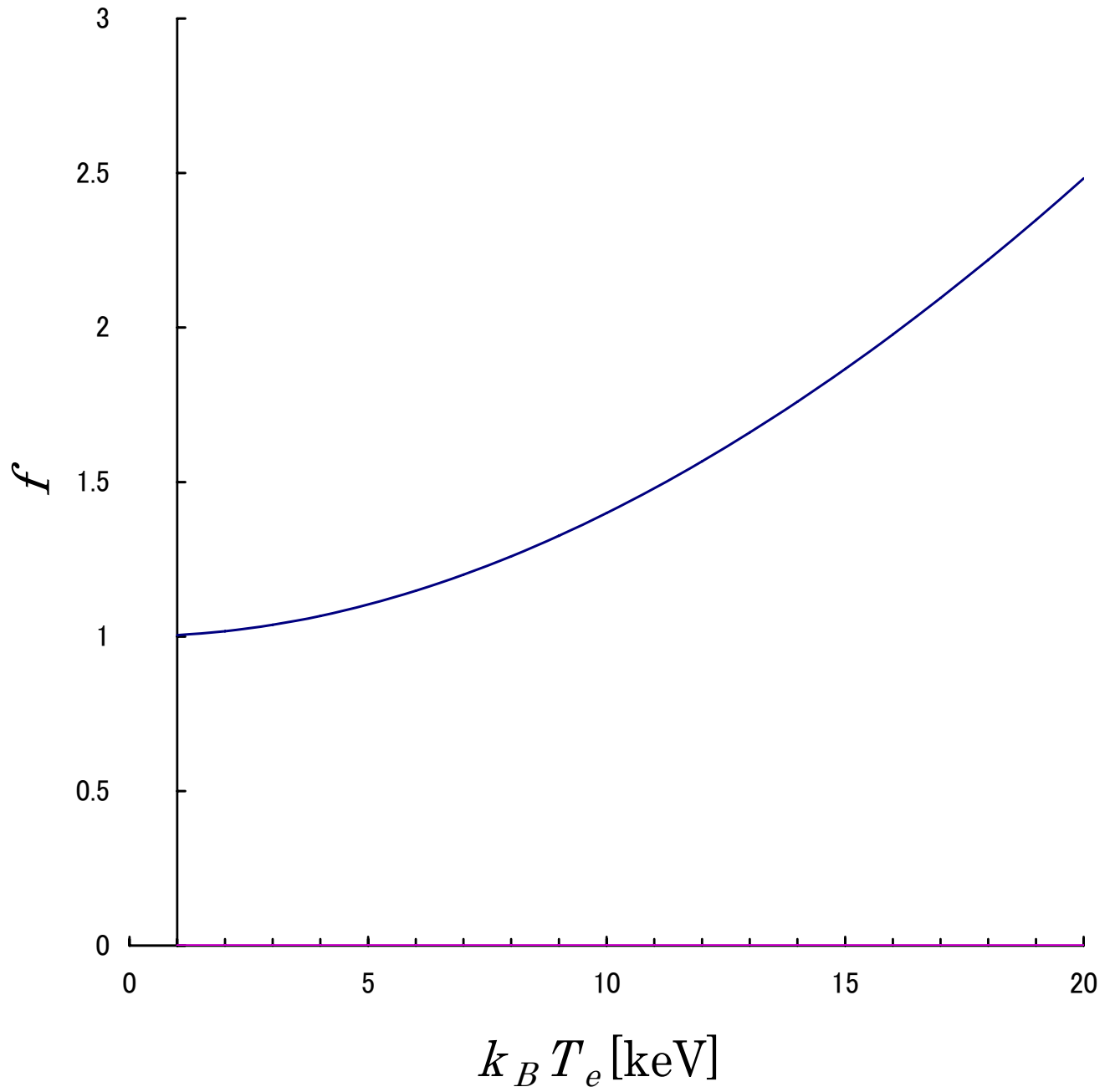


図 3.6: クロスオーバー周波数付近において、熱的スニャエフゼルドビッチ効果に対する運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の寄与を示したグラフ。

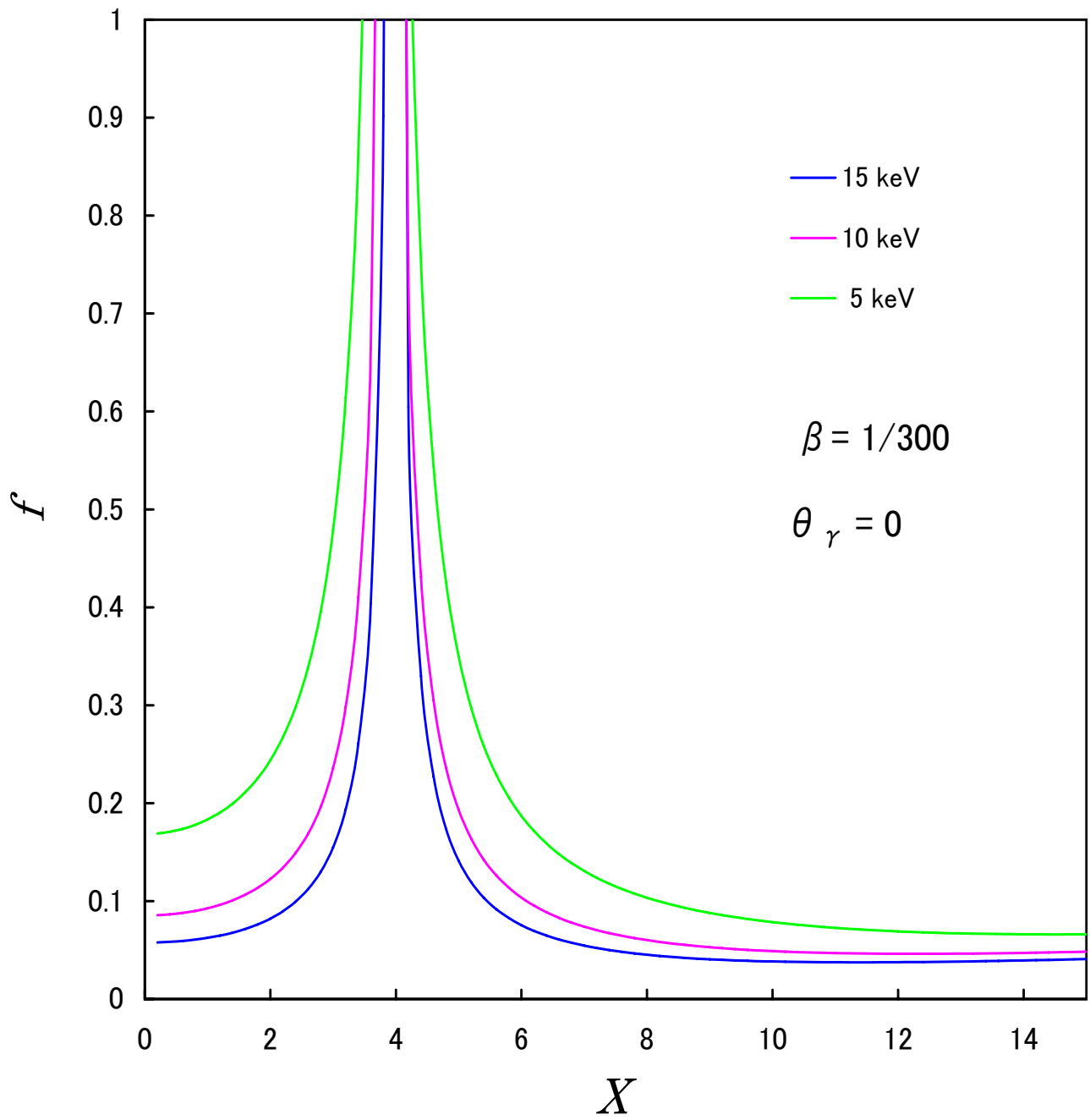


図 3.7: 銀河団の温度  $k_B T_e = 5 \text{ keV}$ 、 $10 \text{ keV}$ 、 $15 \text{ keV}$  の場合について、熱的スニャエフゼルドビッチ効果に対する運動学的スニャエフゼルドビッチ効果の寄与を示す曲線を重ね合わせたグラフ。

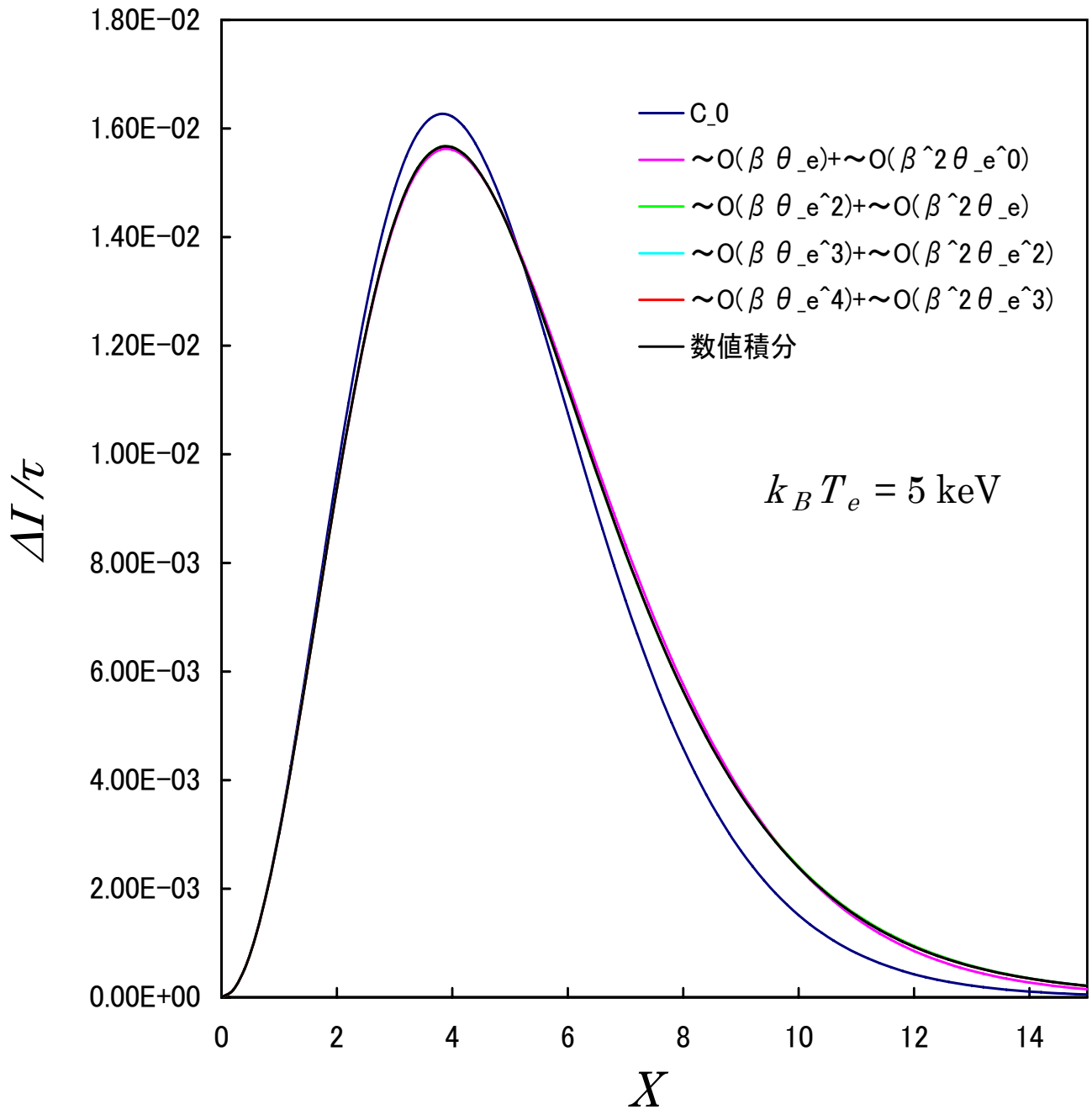


図 3.8: 5 keV の場合で、数値積分の結果と、 $O(\beta\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e^2)$  及び  $O(\beta^2\theta_e)$ 、 $O(\beta\theta_e^3)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^2)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^3)$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。



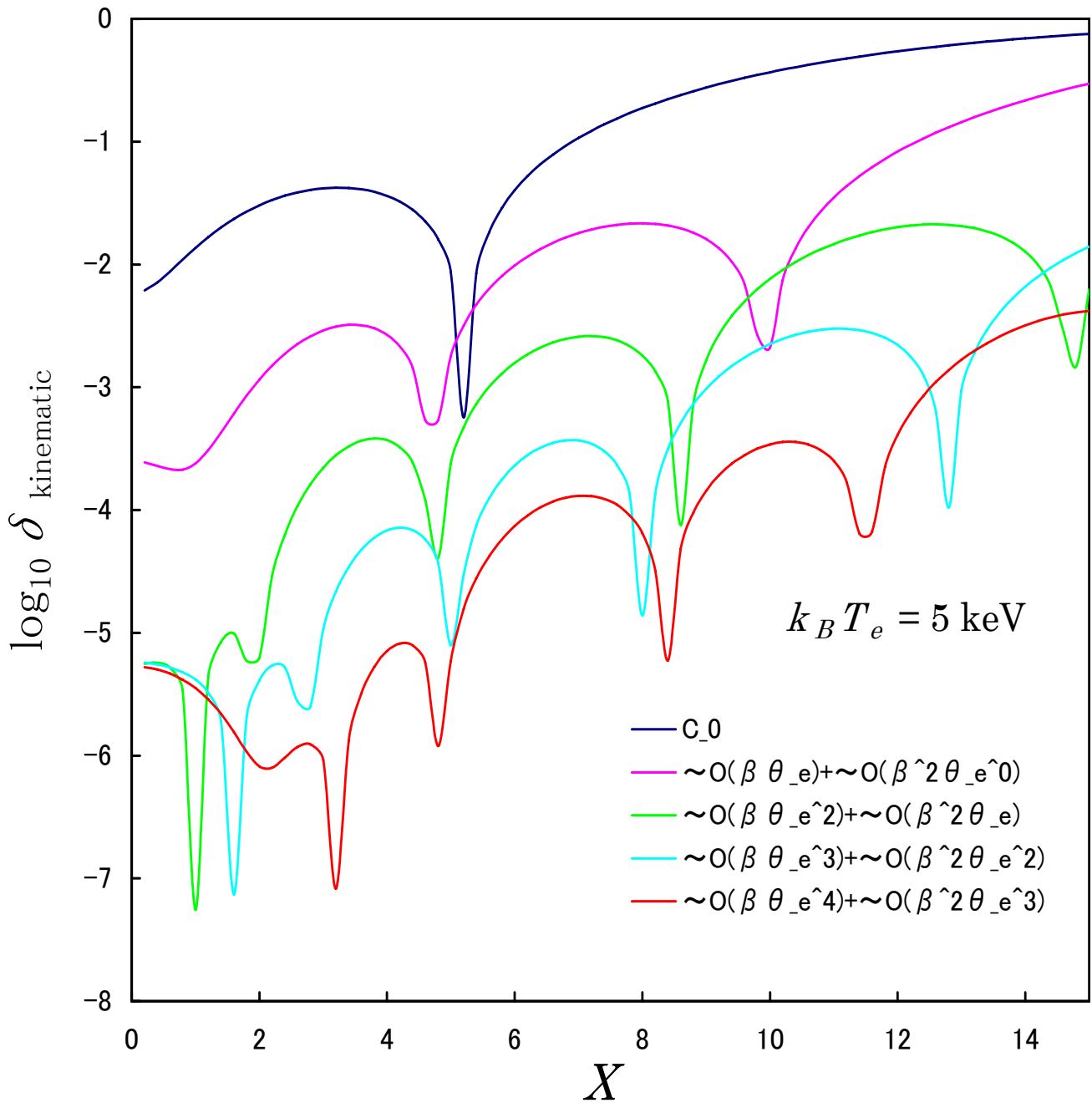


図 3.9: 5 keV の場合で、数値積分に対する、 $O(\beta\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e^2)$  及び  $O(\beta^2\theta_e)$ 、 $O(\beta\theta_e^3)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^2)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^3)$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ

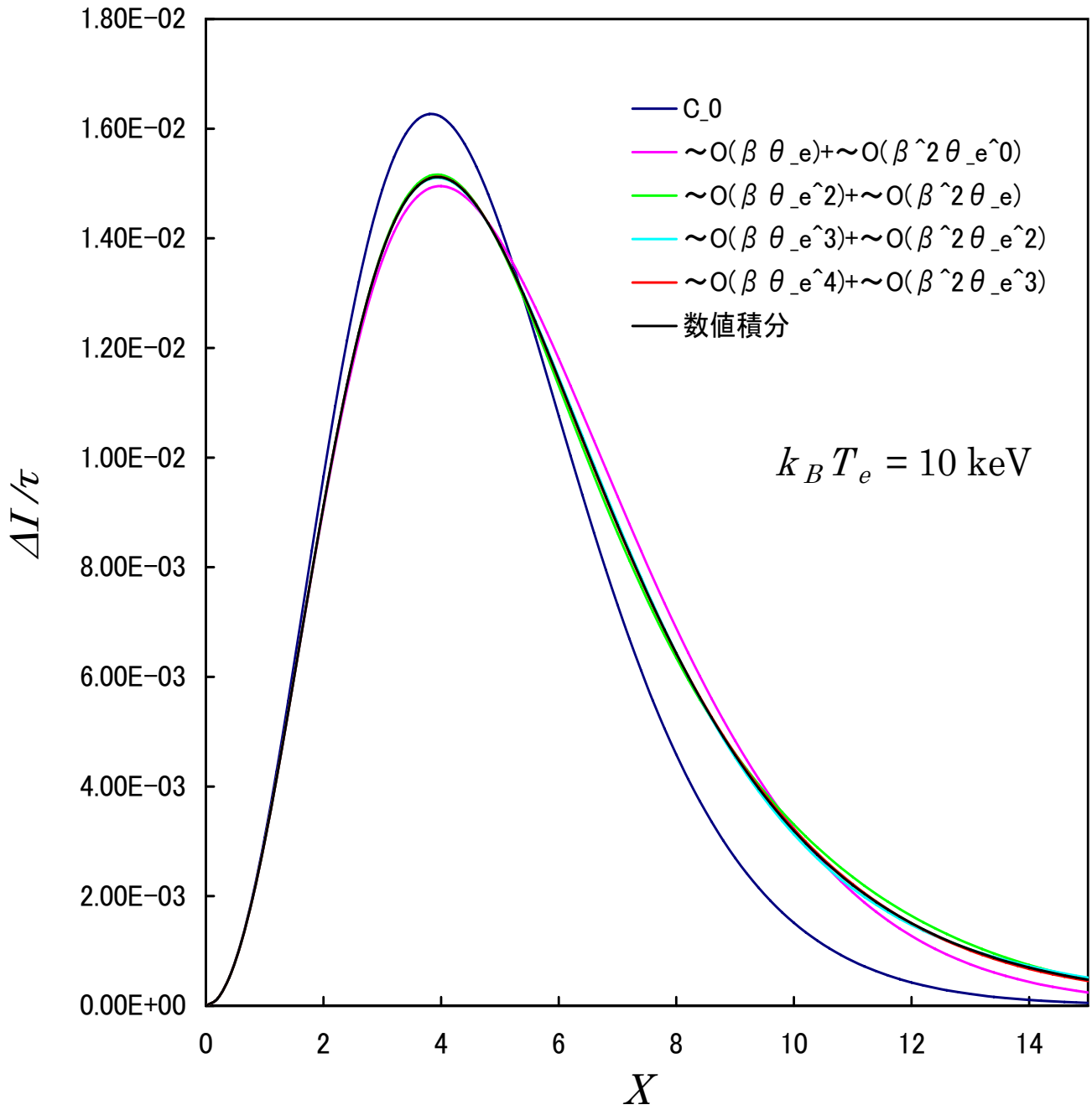


図 3.10: 10 keV の場合で、数値積分の結果と、 $O(\beta\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e^2)$  及び  $O(\beta^2\theta_e)$ 、 $O(\beta\theta_e^3)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^2)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^3)$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

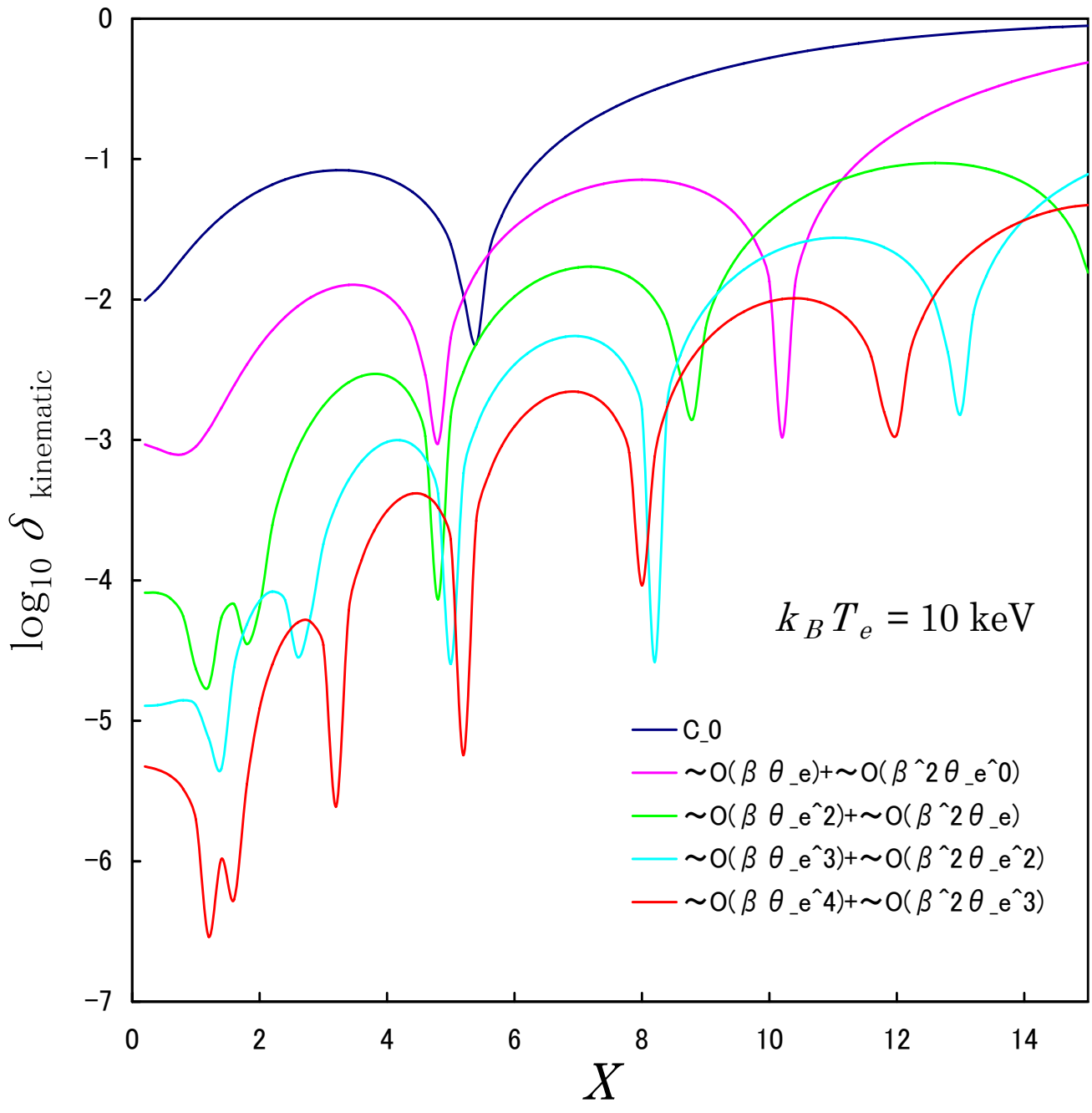


図 3.11: 10 keV の場合で、数値積分に対する、 $O(\beta\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e^2)$  及び  $O(\beta^2\theta_e)$ 、 $O(\beta\theta_e^3)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^2)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^3)$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ

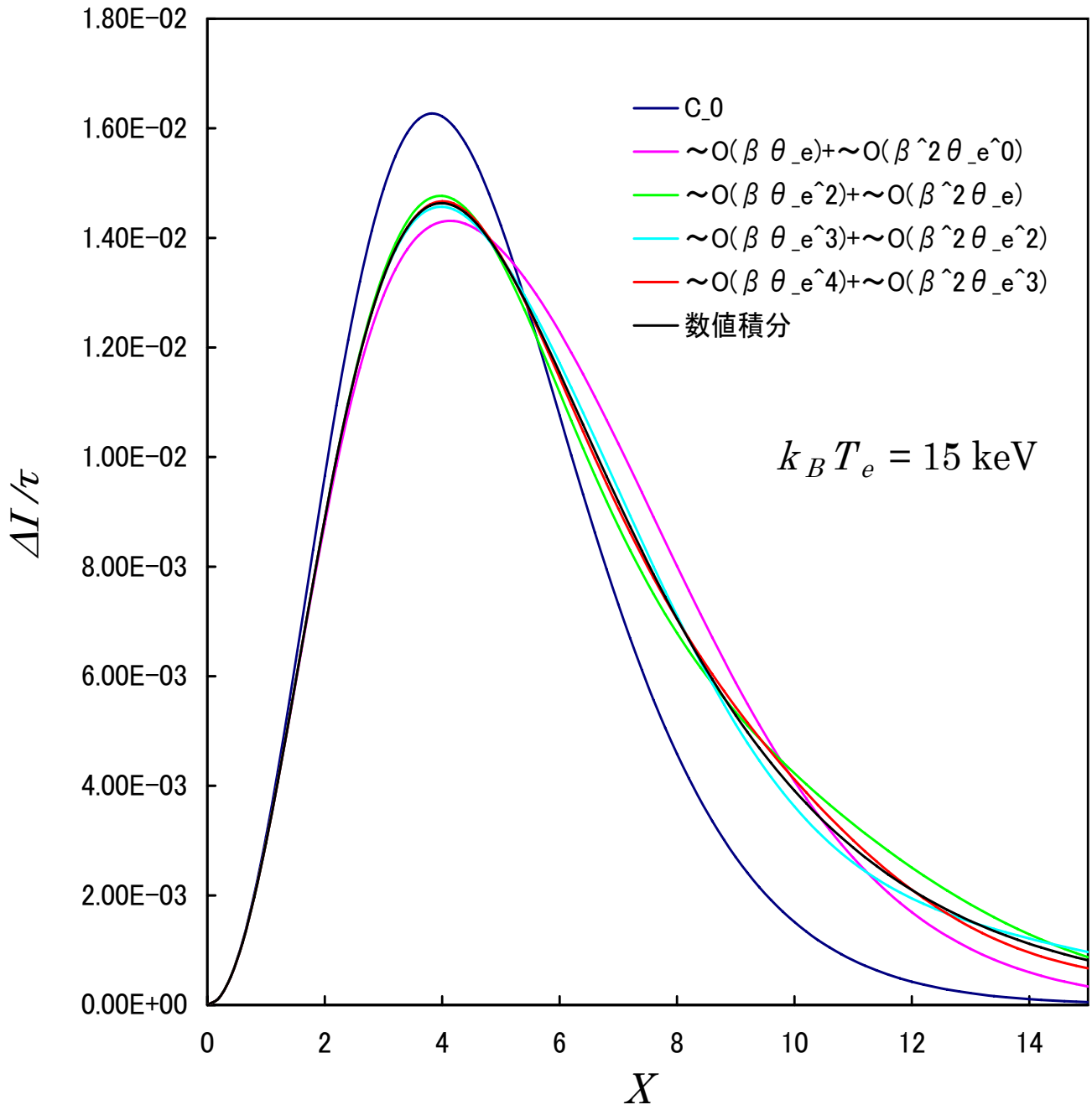


図 3.12: 15 keV の場合で、数値積分の結果と、 $O(\beta\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e^2)$  及び  $O(\beta^2\theta_e)$ 、 $O(\beta\theta_e^3)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^2)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^3)$  までの項を取り入れた展開計算の結果を重ねたグラフ。

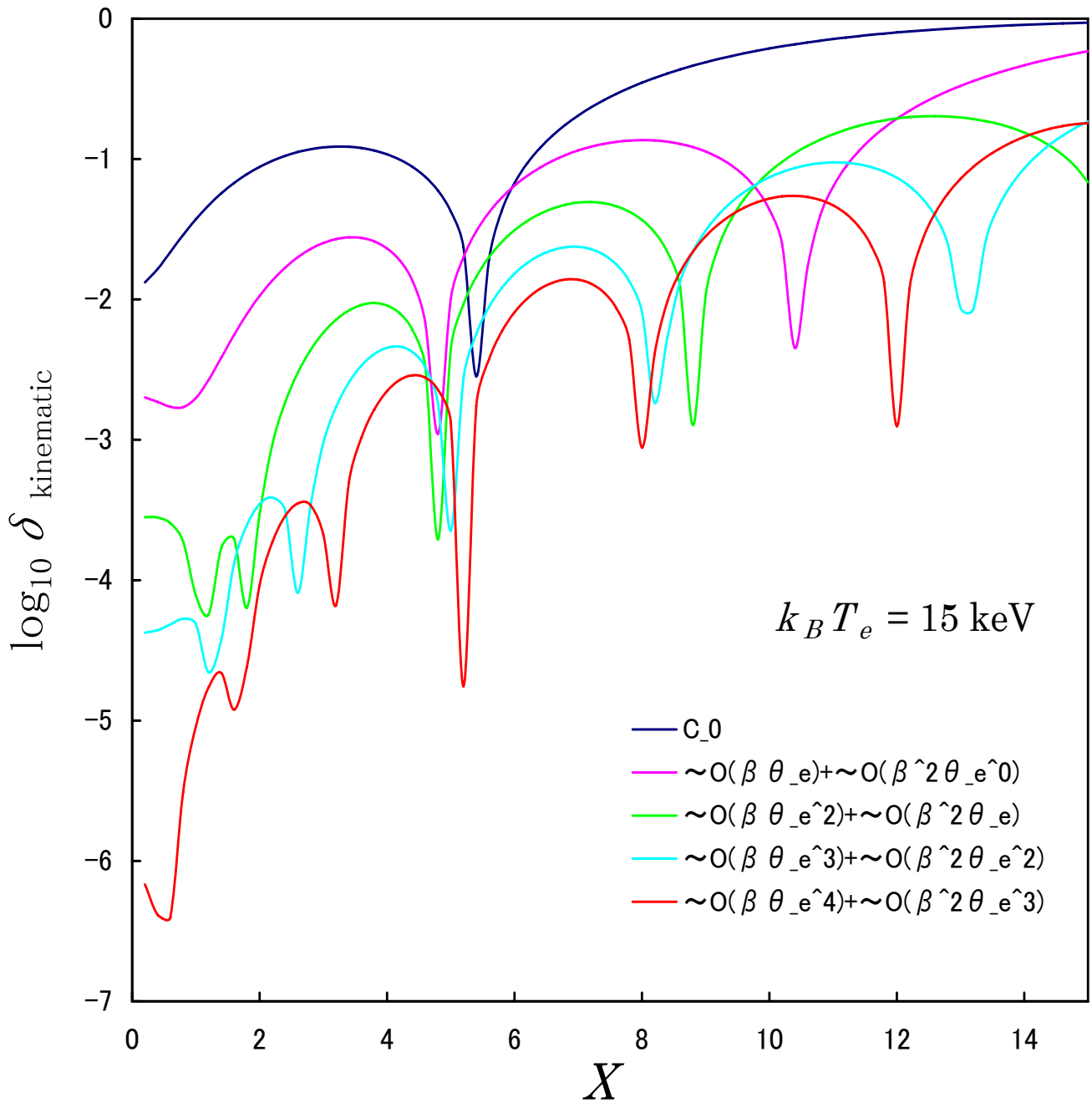


図 3.13: 15 keV の場合で、数値積分に対する、 $O(\beta\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^0)$ 、 $O(\beta\theta_e^2)$  及び  $O(\beta^2\theta_e)$ 、 $O(\beta\theta_e^3)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^2)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^3)$  までの項を取り入れた展開計算の相対誤差を表わしたグラフ

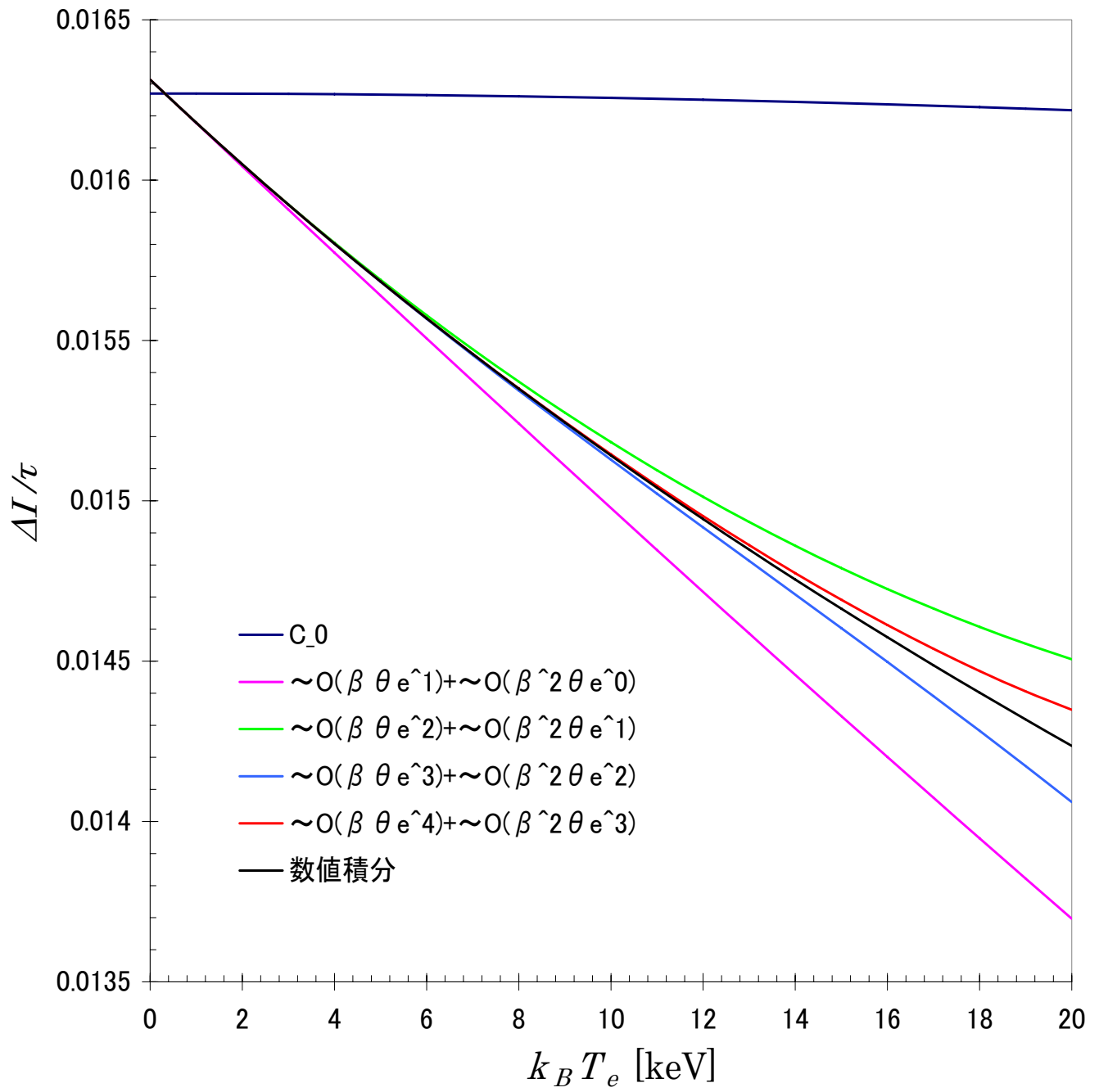


図 3.14: 相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のクロスオーバー周波数において、数値積分と各次数の展開計算の運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を重ね合わせたグラフ。

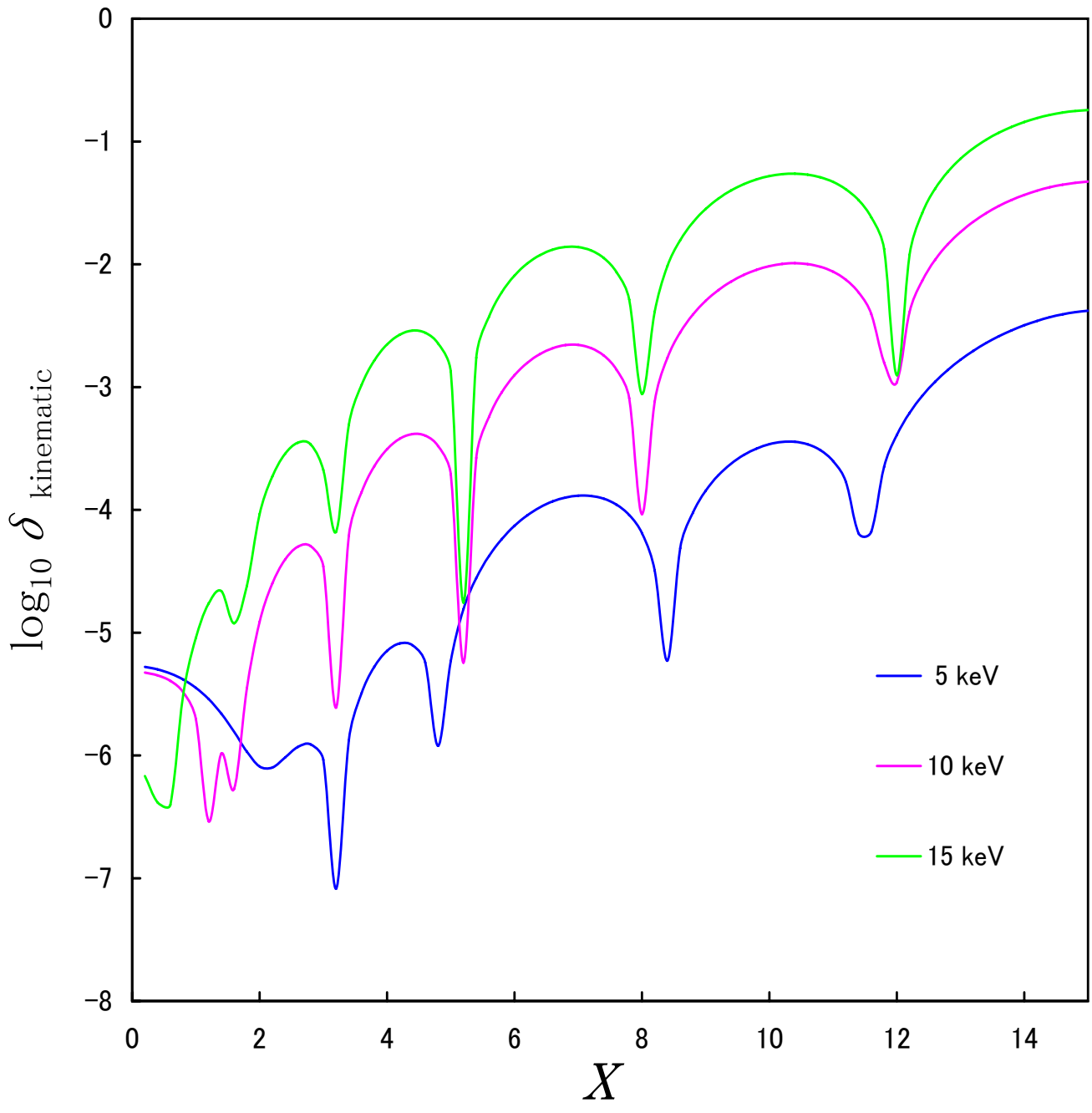


図 3.15:  $O(\beta\theta_e^4)$  及び  $O(\beta^2\theta_e^3)$  までの項を取り入れた展開計算の数値積分に対する相対誤差を、銀河団温度 5 keV、10 keV、15 keV の場合で重ね合わせたグラフ。

### 3.3.6 展開式の各項

最後に、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式：

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{n_0} &= \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \beta^2 [B_0 + \theta_e B_1 + \theta_e^2 B_2 + \theta_e^3 B_3] \\ &\quad + \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \beta P_1(\cos \theta_\gamma) [C_0 + \theta_e C_1 + \theta_e^2 C_2 + \theta_e^3 C_3 + \theta_e^4 C_4] \\ &\quad + \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \beta^2 P_2(\cos \theta_\gamma) [D_0 + \theta_e D_1 + \theta_e^2 D_2 + \theta_e^3 D_3] \end{aligned} \quad (3.42)$$

の各項をグラフに表わした。もちろんグラフの値は、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta I}{\tau} &= \frac{X^4 e^X}{(e^X - 1)^2} \beta^2 [B_0 + \theta_e B_1 + \theta_e^2 B_2 + \theta_e^3 B_3] \\ &\quad + \frac{X^4 e^X}{(e^X - 1)^2} \beta P_1(\cos \theta_\gamma) [C_0 + \theta_e C_1 + \theta_e^2 C_2 + \theta_e^3 C_3 + \theta_e^4 C_4] \\ &\quad + \frac{X^4 e^X}{(e^X - 1)^2} \beta^2 P_2(\cos \theta_\gamma) [D_0 + \theta_e D_1 + \theta_e^2 D_2 + \theta_e^3 D_3] \end{aligned} \quad (3.43)$$

により定義されるスペクトル強度変化に変換した値である。そして次のように式を定義することにする。

$$\frac{\Delta I}{\tau} (B_i) \equiv \frac{X^4 e^X}{(e^X - 1)^2} \times [B_i \theta_e^i] \quad (0 \leq i \leq 3) \quad (3.44)$$

$$\frac{\Delta I}{\tau} (C_i) \equiv \frac{X^4 e^X}{(e^X - 1)^2} \times [C_i \theta_e^i] \quad (0 \leq i \leq 4) \quad (3.45)$$

$$\frac{\Delta I}{\tau} (D_i) \equiv \frac{X^4 e^X}{(e^X - 1)^2} \times [D_i \theta_e^i] \quad (0 \leq i \leq 3) \quad (3.46)$$

それぞれのグラフは、p.143 以降に載せてある。



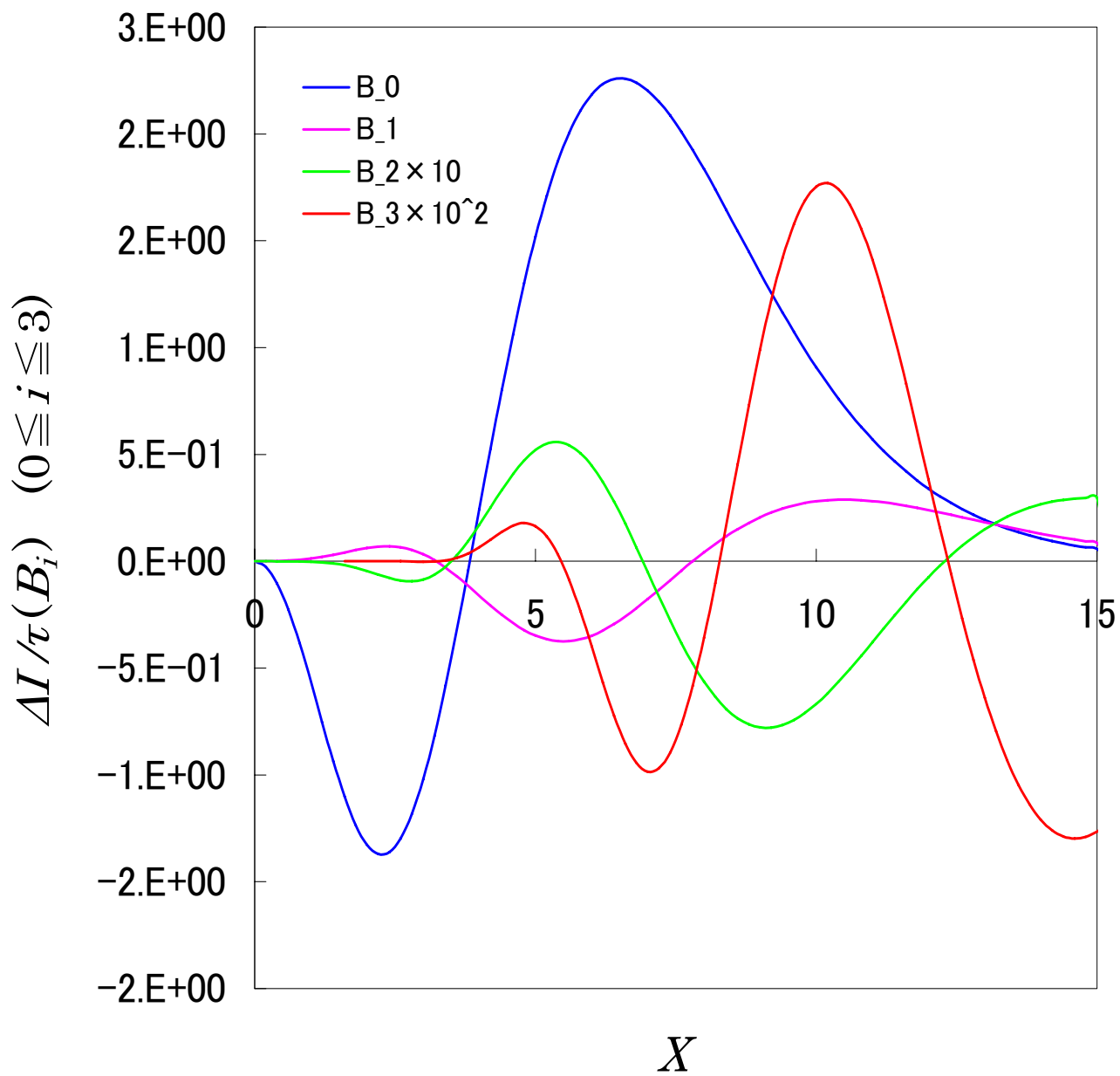


図 3.16:  $\Delta I/\tau(B_i)$  の各項の縮尺を変えて表示したグラフ。 ( $0 \leq i \leq 3$ )

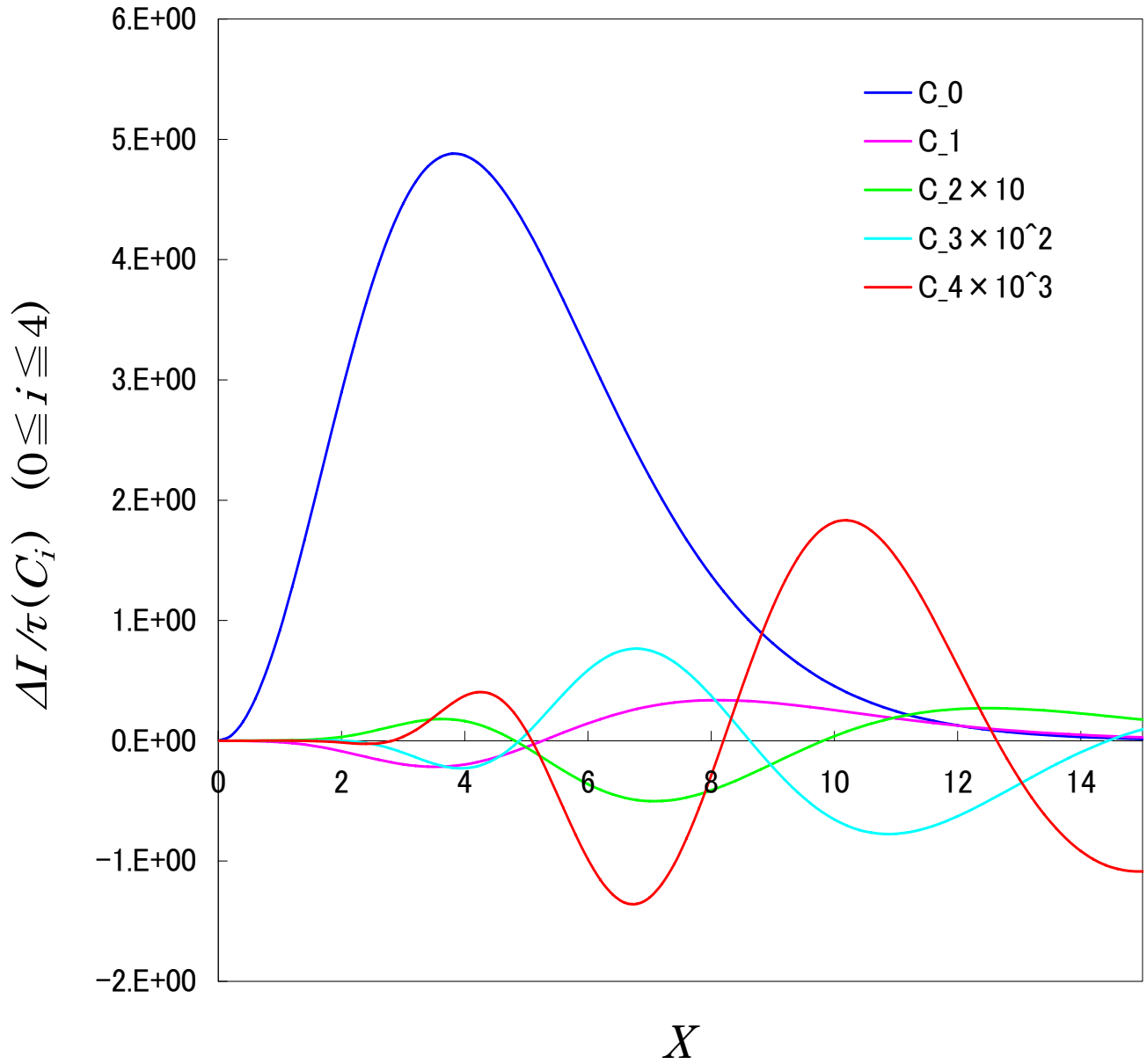


図 3.17:  $\Delta I/\tau(C_i)$  の各項の縮尺を変えて表示したグラフ。 ( $0 \leq i \leq 4$ )

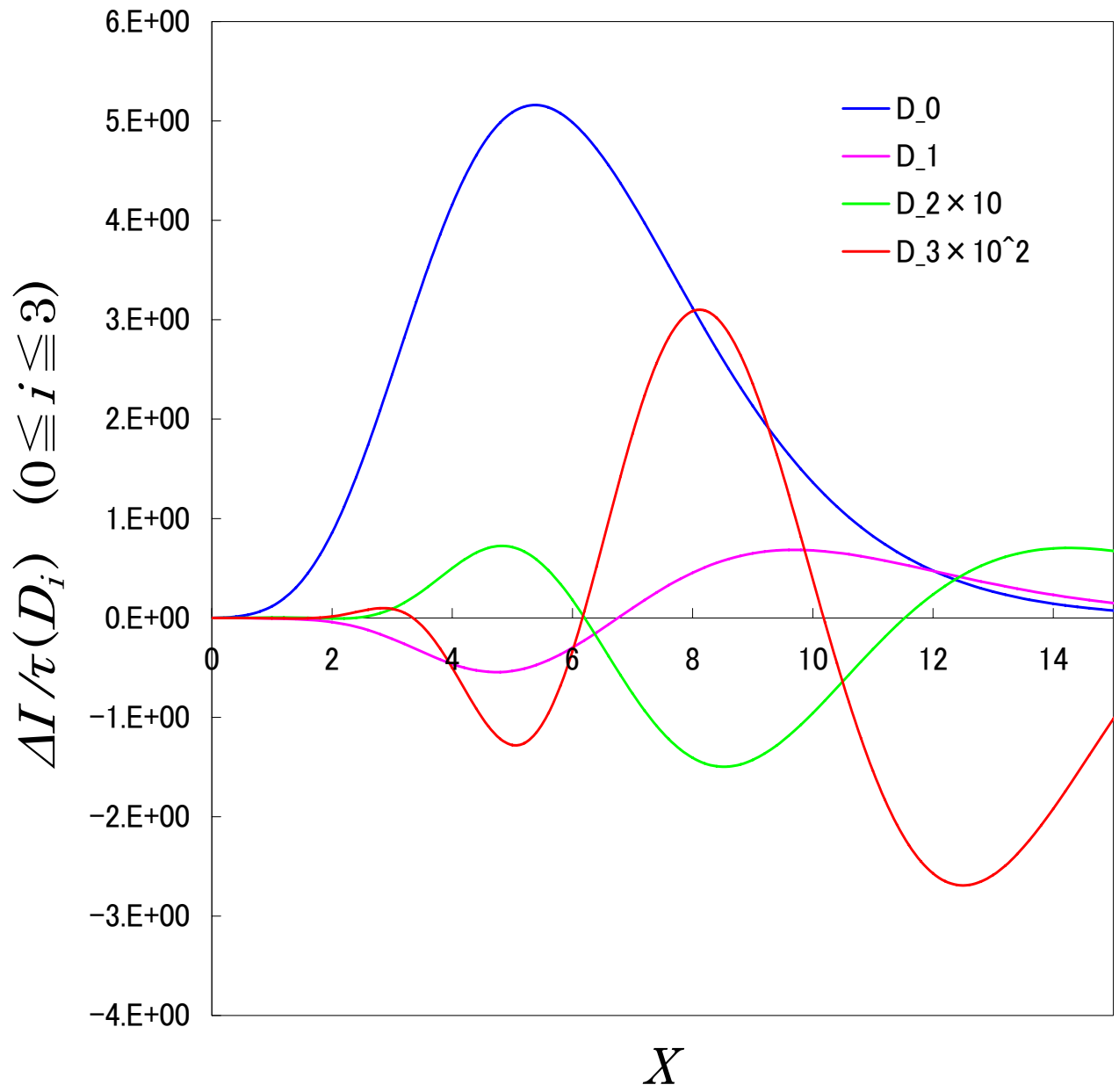


図 3.18:  $\Delta I/\tau(D_i)$  の各項の縮尺を変えて表示したグラフ。 ( $0 \leq i \leq 3$ )

## 3.4 Shimon と Rephaeli による運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算

### 3.4.1 Shimon と Rephaeli による計算結果との比較及び考察

2004年に Shimon と Rephaeli [12] による運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の結果が報告された。ところが、彼ら展開計算の結果は、野澤、伊藤、神山 [9]、Sazonov と Sunyaev [10]、Challinor と Iles [11] の3グループの結果とは一致しなかった。そこで、彼らの計算を確かめる前に、2006年に我々が計算した結果 [13] と比較することで、我々の値に対してどのように違いが出ているかを確かめることにした。まず、我々が計算した精密な数値積分の値を用いて、我々の展開の誤差と彼らの展開の誤差を比較した。これは、精度不足による違いなのか、それとも別の原因が考えられるのかを確かめるためにも重要なことである。なお、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算結果に関しては、彼らと一致していることが分かっている。

まず、我々の展開の誤差を  $\delta_{\text{present}}$ 、Shimon と Rephaeli の展開の誤差を  $\delta_{\text{SR}}$  とし、次のように定義する。

$$\delta_{\text{present}} \equiv \left| \frac{(\Delta I)_{\text{present analytic}} - (\Delta I)_{\text{present numerical}}}{(\Delta I)_{\text{present numerical}}} \right| \quad (3.47)$$

$$\delta_{\text{SR}} \equiv \left| \frac{(\Delta I)_{\text{SR analytic}} - (\Delta I)_{\text{present numerical}}}{(\Delta I)_{\text{present numerical}}} \right| \quad (3.48)$$

この二つの誤差を比較したものを、銀河団の温度が 5 keV、10 keV、15 keV それぞれの場合で示したグラフが図 3.19、図 3.20、図 3.21 である。

これらの結果から、彼らの展開の誤差は、近似が良くなる低周波数側で収束をせず、また、ほぼ周波数の全域で誤差が水平を保っている様子が分かる。具体的には、低周波数側でさえ、5 keV のときは 1%、10 keV のときは 2%、15 keV のときは 3% の誤差であるという結果が得られた。

これらのことから推測すると、計算の精度に関わる問題ではなく、解法自体に間違いが生じていると考えられる。そこで、彼らの運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算を見直すことにする。

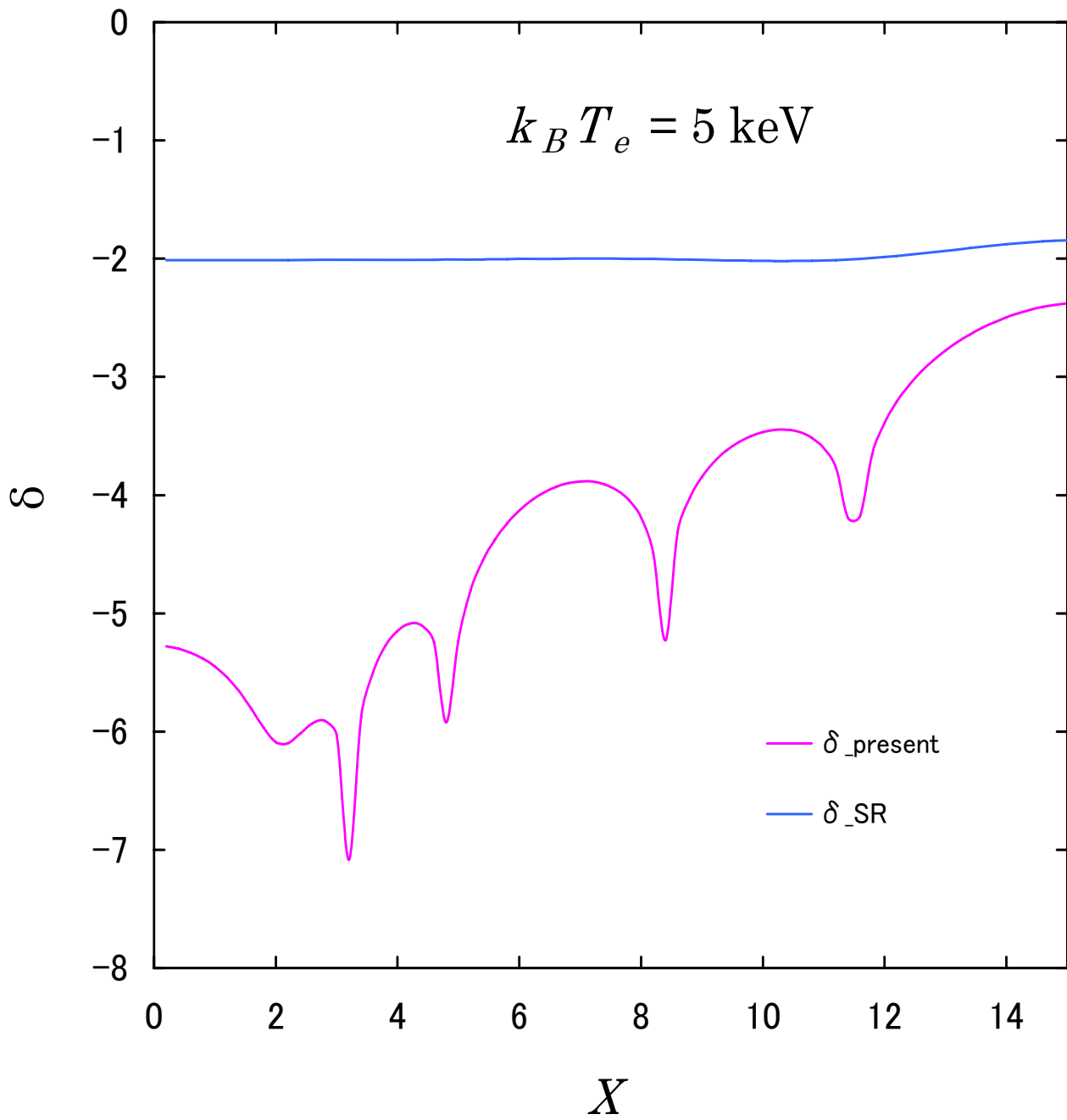


図 3.19: 銀河団の温度が  $k_B T_e = 5 \text{ keV}$  の場合において、我々の数値積分に対する我々の展開の誤差  $\delta_{\text{present}}$  と Shimon と Rephaeli の展開の誤差  $\delta_{\text{SR}}$  を比較したグラフ。

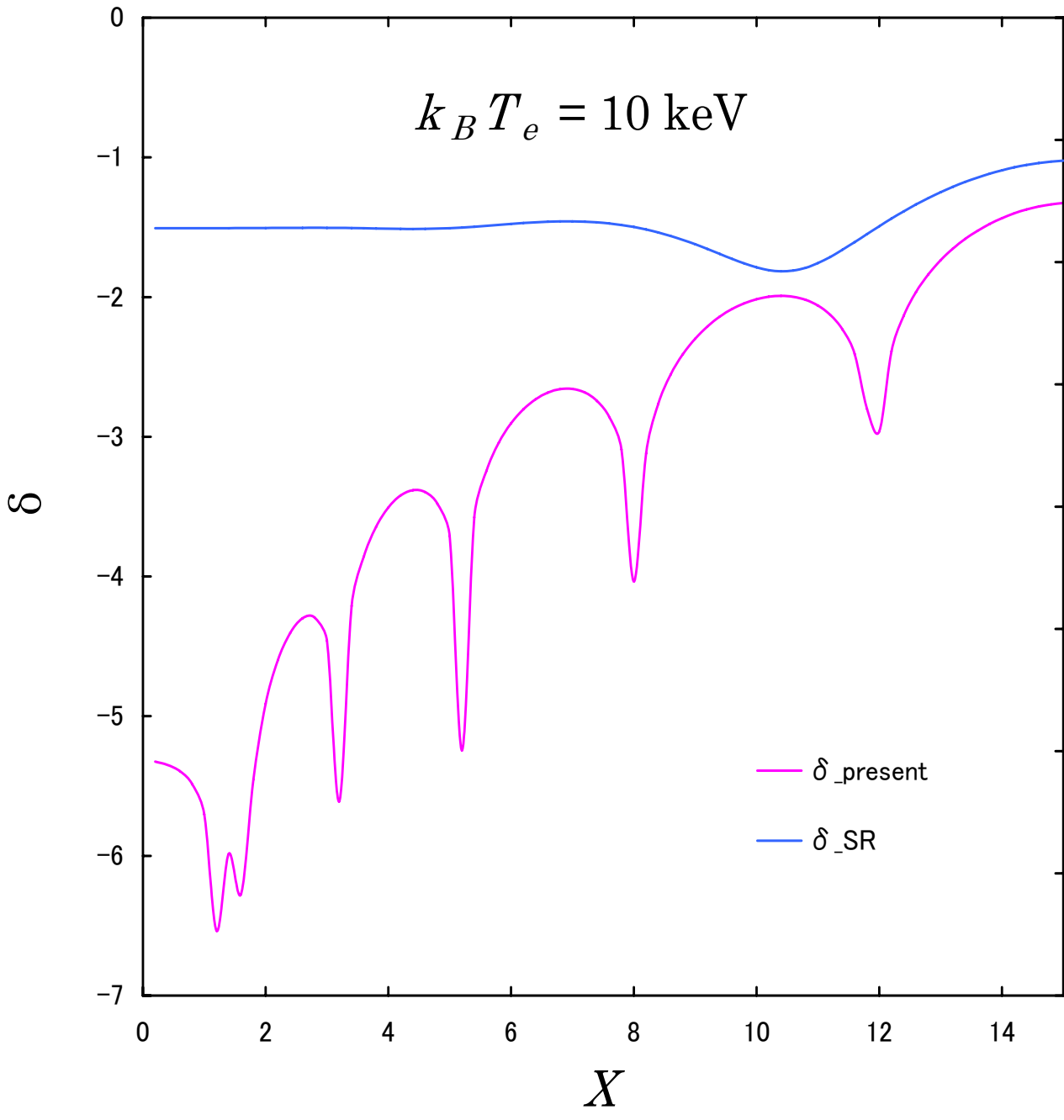


図 3.20: 銀河団の温度が  $k_B T_e = 10 \text{ keV}$  の場合において、我々の数値積分に対する我々の展開の誤差  $\delta_{\text{present}}$  と Shimon と Rephaeli の展開の誤差  $\delta_{\text{SR}}$  を比較したグラフ。

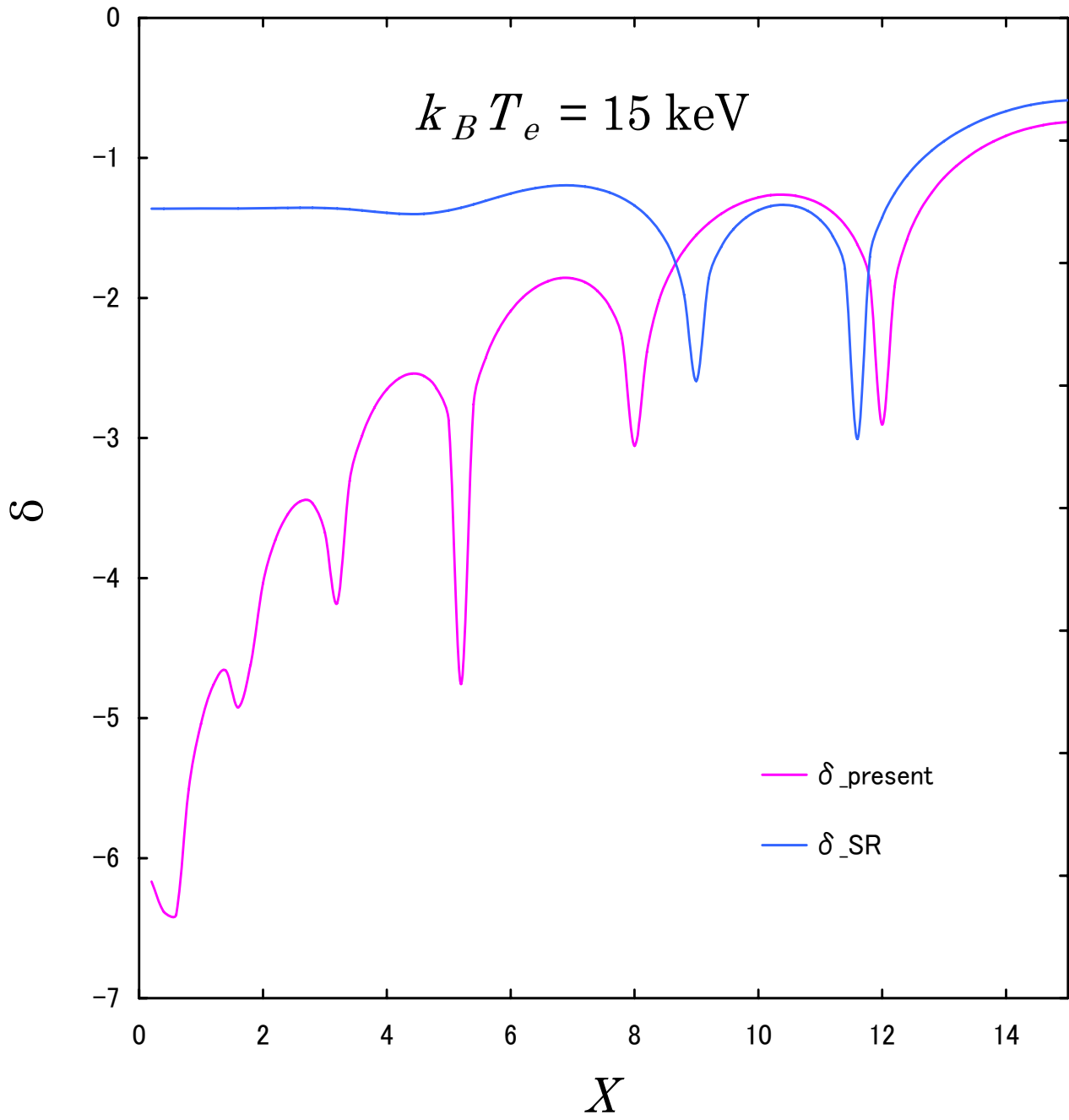


図 3.21: 銀河団の温度が  $k_B T_e = 15 \text{ keV}$  の場合において、我々の数値積分に対する我々の展開の誤差  $\delta_{\text{present}}$  と Shimon と Rephaeli の展開の誤差  $\delta_{\text{SR}}$  を比較したグラフ。

### 3.4.2 Shimon と Rephaeli による計算と間違い箇所

#### Shimon と Rephaeli による熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算

運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の前に、Rephaeli(1995a,1995b)による熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果について紹介する。

以後使われている添え字については、

1. 添え字「 $t$ 」は、銀河団系を表わす。
2. 添え字「 $e$ 」は、電子に関係する量を表わす。
3. 添え字「 $0$ 」は電子の静止系を表わす。
4. 「 $0$ 」の表示が無い場合は、CMB系を表わす。

と定義されている。

電子に対して、角度  $\theta_0$  で入射する電子の散乱確率は、

$$\begin{aligned} p(\theta_0) &= p(\mu_0) \\ &= \frac{1}{2\gamma^4(1+\beta\mu_0)^3} d\mu_0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\mu_0 \equiv \cos\theta_0 \quad (3.50)$$

$$\beta \equiv \frac{v_e}{c} \quad (v_e : \text{電子の速度}) \quad (3.51)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (: \text{ローレンツファクター}) \quad (3.52)$$

である。

次に、電子に対して、角度  $\theta_0$  で入射してきた光子が角度  $\theta'_0$  へ散乱される確率は、

$$f(\mu_0, \mu'_0) d\mu'_0 = \frac{3}{8} \left[ 1 + \mu_0^2 \mu_0'^2 + \frac{1}{2} (1 - \mu_0^2) (1 - \mu_0'^2) \right] d\mu'_0 \quad (3.53)$$

である。この式については、Wright [46] による 1979 年の論文で言及されている。

散乱後の周波数シフトを  $s$  (  $\nu$  : 散乱前の光子の周波数,  $\nu'$  : 散乱後の光子の周波数 ) として、

$$\begin{aligned} s &\equiv \ln\left(\frac{\nu'}{\nu}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1+\beta\mu'_0}{1+\beta\mu_0}\right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

を定義すると、

$$\begin{aligned} e^s &= \frac{1+\beta\mu'_0}{1+\beta\mu_0} \\ e^s ds &= \frac{\beta}{1+\beta\mu_0} d\mu'_0 \end{aligned}$$



であるから、光子が速度  $v_e = c\beta$  の電子に散乱され、周波数シフト  $s$  を起こす確率は、

$$\begin{aligned} P(s; \beta) ds &= \int p(\mu_0) f(\mu_0, \mu'_0) d\mu_0 \left( \frac{d\mu'_0}{ds} \right) ds \\ &= \frac{1}{2\gamma^4 \beta} \int \frac{e^s f(\mu_0, \mu'_0)}{(1 + \beta\mu_0)^2} d\mu_0 ds \end{aligned} \quad (3.55)$$

となり、 $P(s; \beta)$  を電子のマックスウェル分布にわたって平均をとると、

$$P_1(s) ds = \frac{\int \beta^2 \gamma^5 e^{-\frac{\gamma-1}{\beta}} P(s; \beta) d\beta}{\int \beta^2 \gamma^5 e^{-\frac{\gamma-1}{\beta}} d\beta} ds \quad (3.56)$$

となる。最終的に、光子占有数の全変化率は、

$$\frac{dn_t(x)}{dt} = cn_e \sigma_T \int_{-\infty}^{\infty} [n(xe^s) - n(x)] P_1(s) ds \quad (3.57)$$

を計算すれば求められる。

$$\begin{aligned} n_e &: \text{電子の数密度} \\ \sigma_T &: \text{トムソン散乱断面積} \\ x &: \text{無次元周波数} \left( \equiv \frac{h\nu}{k_B T}, \quad T: \text{CMB の温度} \right) \end{aligned}$$

### Shimon と Rephaeli による運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算

さて、Shimon と Rephaeli は変数変換により、彼らの計算方法が、Sazonov & Sunyaev [10] の方法と一致することを確認している。そのため、運動学的 SZ 効果を求める際は、変数  $d\mu_0 d\beta ds$  の代わりに、Sazonov & Sunyaev [10] が熱的 SZ 効果の計算に用いている変数  $d\beta d\mu'_0 d\mu_0$  を採用している。そこで、Sazonov & Sunyaev [10] の方法を参考にして進めていく。また、以降の流れで用いられている無次元周波数  $x$  は、我々が用いている無次元周波数  $X$  のことである。

電子静止系の光子輸送方程式は以下のように記述される。

$$\frac{dn_0}{dt_0}(\mu_0, \nu_0) = cn_{e0} \int \frac{d\sigma}{d\Omega'_0} [n_0(\mu'_0, \nu_0) - n_0(\mu_0, \nu_0)] d\Omega'_0 \quad (3.58)$$

ただし、

$$n_{e0} : \text{電子の静止系での電子の数密度}$$

これから、電子の静止系から CMB 系への座標変換をしていく。ここで、CMB 系の光子の周波数  $\nu$ 、 $\nu'$  で表されているプランク占有数：

$$\begin{aligned} n(\nu) &= \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \\ &\equiv \frac{1}{e^x - 1} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
n(\nu') &= \frac{1}{e^{\frac{h\nu'}{k_B T}} - 1} \\
&\equiv \frac{1}{e^{x'} - 1}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

は、ローレンツ変換による関係式：

$$\begin{aligned}
\nu &= \nu_0 \gamma (1 + \beta \mu_0) \\
\nu' &= \nu_0 \gamma (1 + \beta \mu'_0)
\end{aligned}$$

を利用すると、電子の静止系での光子の無次元周波数  $x_0 \equiv \frac{h\nu_0}{k_B T}$  を用いて、

$$n_0(\mu_0, \nu_0) = \frac{1}{e^{x_0 \gamma (1 + \beta \mu_0)} - 1} \tag{3.61}$$

$$n_0(\mu'_0, \nu_0) = \frac{1}{e^{x_0 \gamma (1 + \beta \mu'_0)} - 1} \tag{3.62}$$

と表される。よって、

$$x' = x \frac{1 + \beta \mu'_0}{1 + \beta \mu_0} \tag{3.63}$$

と表せることがわかる。そして、電子の静止系での微分散乱断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'_0} = \frac{1}{2} \sigma_T f(\mu_0, \mu'_0) \tag{3.64}$$

で与えられる。

まず、(3.58) 式の中で、電子の静止系で表されている時間の変数  $dt_0$  と電子の数密度  $n_{e0}$  を CMB 系での時間の変数  $dt$  と数密度  $n_e$  を使って表しておく。

そこで、ローレンツ変換による関係式：

$$dt_0 = \frac{dt}{\gamma (1 + \beta \mu_0)} \tag{3.65}$$

$$n_{e0} = n_e / \gamma \tag{3.66}$$

を代入すると、

$$\frac{dn_0}{dt}(\mu_0, \nu_0) = \int \frac{cn_e}{\gamma^2 (1 + \beta \mu_0)} \frac{d\sigma}{d\Omega'_0} \delta n d\Omega'_0 \tag{3.67}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\delta n &\equiv n_0(\mu'_0, \nu_0) - n_0(\mu_0, \nu_0) \\
&= \frac{1}{e^{xz} - 1} - \frac{1}{e^x - 1}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$z \equiv \frac{1 + \beta \mu'_0}{1 + \beta \mu_0} \tag{3.69}$$

である。

また、変数  $\frac{d\sigma}{d\Omega'_0}$  については、立体角のローレンツ変換による関係式：

$$d\Omega'_0 \equiv -d\mu'_0 \frac{d\varphi'_0}{2\pi} \quad (3.70)$$

$$d\mu' = \frac{1}{\gamma^2 (1 + \beta\mu'_0)^2} d\mu'_0 \quad (3.71)$$

$$d\varphi' = d\varphi'_0 \quad (3.72)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'_0} \right)_{\text{CMB}} d\Omega' &= \gamma^2 (1 + \beta\mu'_0)^2 \frac{d\sigma}{d\Omega'_0} \frac{1}{\gamma^2 (1 + \beta\mu'_0)^2} d\Omega'_0 \\ &= \frac{d\sigma}{d\Omega'_0} d\Omega'_0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

となることから明らかなように、CMB系の変数として扱える。

次に、(3.67) 式を  $d\Omega \equiv -d\mu \frac{d\varphi}{2\pi}$  について積分し、マックスウェル分布にわたって平均をとる。

そこで、立体角のローレンツ変換による関係式：

$$d\mu = \frac{1}{\gamma^2 (1 + \beta\mu_0)^2} d\mu_0 \quad (3.74)$$

$$d\varphi = d\varphi_0 \quad (3.75)$$

を用いて、

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\int \int \int \frac{cn_e}{\gamma^2 (1 + \beta\mu_0)} \frac{d\sigma}{d\Omega'_0} \delta n d\Omega'_0 \frac{1}{\gamma^2 (1 + \beta\mu_0)^2} d\Omega_0 e^{-\frac{E_t - m_e c^2}{k_B T_e}} p^2 dp}{\int e^{-\frac{E_t - m_e c^2}{k_B T_e}} p_t^2 dp_t} \quad (3.76)$$

となる。ここで、(3.76) 式の分母：

$$\int e^{-\frac{E_t - m_e c^2}{k_B T_e}} p_t^2 dp_t = \int e^{-\frac{E - m_e c^2}{k_B T_e}} p^2 dp \quad (3.77)$$

としても差し支えない。また、

$$\begin{aligned} \frac{c p}{E} &= c \frac{\gamma m_e v_e}{\gamma m_e c^2} \\ &= \frac{v_e}{c} \\ &= \beta \end{aligned} \quad (3.78)$$

から、 $p$  について解き、

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{c} \beta E \\ &= \frac{E_0}{c} \beta \gamma \quad (E_0 \equiv m_e c^2) \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} dp &= \frac{E_0}{c} [\gamma + \beta (\gamma^3 \beta)] d\beta \\ &= \frac{E_0}{c} \gamma^3 d\beta \end{aligned} \quad (3.80)$$

となることより、

$$\begin{aligned}\int p^2 dp &= \int_{\beta=0}^1 \left(\frac{E_0}{c}\right)^2 (\beta\gamma)^2 \frac{E_0}{c} \gamma^3 d\beta \\ &= \left(\frac{E_0}{c}\right)^3 \int_{\beta=0}^1 \gamma^5 \beta^2 d\beta\end{aligned}\quad (3.81)$$

と変数変換できる。また、

$$\int d\Omega = \int_{\mu=-1}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\mu \frac{d\varphi}{2\pi}$$

と表せるから、

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= \frac{\left(\frac{E_0}{c}\right)^3 \int_{\beta=0}^1 \int_{\mu'_0=-1}^1 \int_{\varphi'_0=0}^{2\pi} \int_{\mu_0=-1}^1 \int_{\varphi_0=0}^{2\pi} \frac{cn_e}{\gamma^4 (1+\beta\mu_0)^3} \frac{d\sigma}{d\Omega'_0} \delta n e^{-\frac{E_t - m_e c^2}{k_B T_e}} \gamma^5 \beta^2 d\beta d\mu'_0 \frac{d\varphi'_0}{2\pi} d\mu_0 \frac{d\varphi_0}{2\pi}}{\left(\frac{E_0}{c}\right)^3 \int_{\beta=0}^1 \gamma^5 \beta^2 e^{-\frac{E - m_e c^2}{k_B T_e}} d\beta} \\ &= \frac{\int_{\beta=0}^1 \int_{\mu'_0=-1}^1 \int_{\mu_0=-1}^1 \int_{\varphi_0=0}^{2\pi} \frac{cn_e}{\gamma^4 (1+\beta\mu_0)^3} \frac{d\sigma}{d\Omega'_0} \delta n e^{-\frac{E_t - m_e c^2}{k_B T_e}} \gamma^5 \beta^2 d\beta d\mu'_0 d\mu_0 \frac{d\varphi_0}{2\pi}}{\int_{\beta=0}^1 \gamma^5 \beta^2 e^{-\frac{E - m_e c^2}{k_B T_e}} d\beta}\end{aligned}\quad (3.82)$$

となる。

ここで、銀河団が静止しているとして考える熱的 SZ 効果の場合、銀河団座標系は CMB 系であるため、 $E_t = E$  を (3.82) 式に代入して計算すればよい。一方、銀河団が、 $\vec{v}_c = c\vec{\beta}_c$  の固有速度で等速度運動をしていると考えた運動学的 SZ 効果の場合は、 $E_t \neq E$  である。

そこで、次のローレンツ変換による関係式：

$$E = \gamma_c (E_t + c\vec{\beta}_c \cdot \vec{p}_t) \quad (3.83)$$

$$\vec{p} = \gamma_c (\vec{p}_t + \vec{\beta}_c E_t/c) \quad (3.84)$$

を用いると、

$$\begin{aligned}E &= \gamma_c \left[ E_t + c\vec{\beta}_c \cdot \left( \vec{p}/\gamma_c - \vec{\beta}_c E_t/c \right) \right] \\ &= \gamma_c E_t + c\vec{\beta}_c \vec{p} - \gamma_c \beta_c^2 E_t \\ &= E_t/\gamma_c + c\vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta} E/c\end{aligned}$$

$$E_t = \gamma_c (1 - \vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta}) E \quad (3.85)$$

と計算できる。

また、運動学的 SZ 効果の場合、CMB 系に対して銀河団が固有運動をしているため、電子の分布関数に対してローレンツ変換を行う必要がある。よってボルツマンファクターは、

熱的 SZ 効果の場合  $E_t = E = \gamma E_0$  を用いて、

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{E_t - m_e c^2}{k_B T_e}\right) &= \exp\left(-\frac{\gamma E_0 / m_e c^2 - 1}{k_B T_e / m_e c^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\gamma - 1}{\theta_e}\right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

運動学的 SZ 効果の場合  $E_t = \gamma_c (1 - \vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta}) E \equiv \gamma_t E_0$  とおくと、

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{E_t - m_e c^2}{k_B T_e}\right) &= \exp\left(-\frac{\gamma_t E_0 / m_e c^2 - 1}{k_B T_e / m_e c^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\gamma_t - 1}{\theta_e}\right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

と変形できる。

しかし、ここで彼らは、(3.82) は、銀河団座標系で表わされた変数で積分していると考えてしまい、

$$\begin{aligned} d^3 p_t &= \frac{E_t}{E} d^3 p \\ &= \gamma_c (1 - \beta_c \cdot \beta) p^2 dp d\mu d\varphi \\ &= \gamma_c (1 - \beta_c \cdot \beta) \gamma^5 \beta^2 d\beta d\mu d\varphi \end{aligned} \quad (3.88)$$

という変換を行った。しかし、すでに CMB 系への変換がされているため、その変換は必要がない。そのため、余分な変換ファクター  $\gamma_c (1 - \beta_c \cdot \beta)$  が掛けられてしまった。それが、値のずれの原因であり、そのファクターを除いて展開すれば、我々の結果と一致することが分かった。それを示すため、計算を続けていくことにする。

さて、以上より、それぞれ次のような式としてまとめることができる。

熱的 SZ 効果

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{D} \int_{\beta=0}^1 \int_{\mu'_0=-1}^1 \int_{\mu_0=-1}^1 \frac{cn_e}{\gamma^4 (1 + \beta\mu_0)^3} \frac{d\sigma}{d\Omega'_0} \delta n e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}} \gamma^5 \beta^2 d\beta d\mu'_0 d\mu_0 \quad (3.89)$$

運動学的 SZ 効果

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{D} \int_{\beta=0}^1 \int_{\mu'_0=-1}^1 \int_{\mu_0=-1}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{cn_e}{\gamma^4 (1 + \beta\mu_0)^3} \frac{d\sigma}{d\Omega'_0} \delta n e^{-\frac{\gamma_t-1}{\theta_e}} \gamma^5 \beta^2 d\beta d\mu'_0 d\mu_0 \frac{d\varphi_0}{2\pi} \quad (3.90)$$

ここで、

$$D \equiv \int_0^1 \gamma^5 \beta^2 e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}} d\beta \quad (3.91)$$

$$\gamma_t \equiv \gamma_c (1 - \vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta}) \gamma \quad (3.92)$$

$$\gamma_c = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_c^2}} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \vec{\beta}_c &= \beta_c (\sin \theta_c \cos \varphi_c, \sin \theta_c \sin \varphi_c, \cos \theta_c) \\ &= \beta_c (\sin \theta_c, 0, \cos \theta_c) \quad (\varphi_c = 0) \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\vec{\beta} = \beta (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (3.95)$$

である。また、積分変数が電子の静止系であるため、ローレンツ変換による関係式：

$$\cos \theta = \frac{\mu_0 + \beta}{1 + \beta \mu_0} \quad (3.96)$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad (3.97)$$

を代入する。

ここからは、運動学的スニエフ・ゼルドビッチ効果の計算のみ行っていく。(3.98) 式を時間で積分して、

$$\begin{aligned} \Delta n &= \int \frac{dn}{dt} dt \\ &= \frac{\sigma_T \int n_e c dt}{2D} \int_{\beta=0}^1 \int_{\mu'_0=-1}^1 \int_{\mu_0=-1}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{\gamma^4 (1 + \beta \mu_0)^3} f(\mu_0, \mu'_0) \delta n e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}} \gamma^5 \beta^2 d\beta d\mu'_0 d\mu_0 \frac{d\varphi_0}{2\pi} \end{aligned}$$

ここで、光学的深さ  $\tau \equiv \sigma_T \int n_e c dt$  として定義できるので、

$$\frac{\Delta n}{\tau} = \frac{1}{2D} \int_{\beta=0}^1 \int_{\mu'_0=-1}^1 \int_{\mu_0=-1}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{\gamma^4 (1 + \beta \mu_0)^3} f(\mu_0, \mu'_0) \delta n e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}} \gamma^5 \beta^2 d\beta d\mu'_0 d\mu_0 \frac{d\varphi_0}{2\pi} \quad (3.98)$$

(3.98) 式の計算を  $O(\theta_e)^5$ ,  $O(\beta_c)^2$  までの展開により近似して、進めていく。まず、以下のような変数変換を考える。

$$u = \frac{\gamma - 1}{\theta_e}, \quad du = \frac{1}{\theta_e} d\gamma \quad (3.99)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad d\gamma = -\frac{1}{2} \frac{-2\beta}{(1 - \beta^2)^{3/2}} d\beta = \gamma^3 \beta d\beta \quad (3.100)$$

$$\gamma = 1 + \theta_e u \quad (3.101)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \sqrt{\theta_e u} \frac{\sqrt{\theta_e u + 2}}{1 + \theta_e u} \quad (3.102)$$

よって、

$$d\beta = \frac{1}{\gamma^3 \beta} \theta_e du \quad (3.103)$$

と変換することができる。

次に、無次元周波数の変化  $\Delta x \ll 1$  として展開する。

$$xz = x + \Delta x \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= (z - 1)x \\ &= \left( \frac{1 + \beta \mu'_0}{1 + \beta \mu_0} - 1 \right) x \\ &= \frac{\beta(\mu'_0 - \mu_0)}{1 + \beta \mu_0} x \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$n(x) = \frac{1}{e^x - 1} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} n(xz) &= n(x + \Delta x) \\ &\simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n(x)}{\partial x^k} (\Delta x)^k \end{aligned} \quad (3.107)$$

ここで、 $\beta$  を  $\theta_e$  のべき乗に展開したとき、 $\beta$  の最小次の項は  $O(\theta_e^{\frac{1}{2}})$  であるため、 $O(\theta_e^5)$  まで正確に計算するには、 $n(xz)$  は、 $O((\Delta x)^{10})$  まで展開すればよいので、

$$n(xz) \simeq \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n(x)}{\partial x^k} (\Delta x)^k \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \delta n &= n(xz) - n(x) \\ &\simeq \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n(x)}{\partial x^k} (\Delta x)^k \end{aligned} \quad (3.109)$$

となる。

次に、ボルツマンファクターの展開を考える。

$$f(\beta_c) \equiv e^{-\frac{\gamma_t - 1}{\theta_e}}, \quad \gamma_t \equiv \gamma_c (1 - \vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta})$$

$$f(\beta_c) \simeq \sum_{i=0}^2 \frac{f^{(i)}(\beta_c \rightarrow 0)}{i!} \beta_c^i$$

$$\begin{aligned} f'(\beta_c) &= -\frac{\gamma_t'}{\theta_e} f(\beta_c) \\ &= -\frac{1}{\theta_e} \left[ \gamma_c^3 \beta_c (1 - \vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta}) - \gamma_c (\hat{\vec{\beta}}_c \cdot \vec{\beta}) \right] \gamma f(\beta_c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(\beta_c) &= \frac{1}{\theta_e^2} \left[ \gamma_c^3 \beta_c (1 - \vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta}) - \gamma_c (\hat{\vec{\beta}}_c \cdot \vec{\beta}) \right]^2 \gamma^2 f(\beta_c) \\ &\quad - \frac{1}{\theta_e} \left\{ [3\gamma_c^2 (\gamma_c^3 \beta_c) \beta_c + \gamma_c^3] (1 - \vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta}) - 2\gamma_c^3 \beta_c (\hat{\vec{\beta}}_c \cdot \vec{\beta}) \right\} \gamma f(\beta_c) \end{aligned}$$

$$f(\beta_c \rightarrow 0) = e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}}$$

$$f'(\beta_c \rightarrow 0) = \frac{1}{\theta_e} \gamma (\hat{\vec{\beta}}_c \cdot \vec{\beta}) e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}}$$

$$f''(\beta_c \rightarrow 0) = \left[ \frac{1}{\theta_e^2} \gamma^2 (\hat{\vec{\beta}}_c \cdot \vec{\beta})^2 - \frac{1}{\theta_e} \gamma \right] e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}}$$

という手順により、

$$e^{-\frac{\gamma_t - 1}{\theta_e}} \simeq \left\{ 1 + \vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta} \frac{\gamma}{\theta_e} + \left[ -\frac{\beta_c^2}{2} \frac{\gamma}{\theta_e} + (\vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta})^2 \frac{\gamma^2}{2\theta_e^2} \right] \right\} e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}} \quad (3.110)$$

という結果が得られる。これらの結果を用いて、

$$\frac{\Delta n}{\tau} = \sum_{k=1}^{10} A_k L_k \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} A_k &\equiv 2^k x^k \frac{\partial^k n(x)}{\partial x^k} \\ &= -2^{k-2} x^k \left[ \sinh^{-2} \frac{x}{2} \right]^{(k-1)} \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$L_k \equiv \frac{\theta_e}{2^{k+1} k! D} \int_{u=0}^{\infty} \int_{\mu'_0=-1}^1 \int_{\mu_0=-1}^1 \int_{\varphi_0=0}^{2\pi} \frac{\beta^{k+1} (\mu'_0 - \mu_0)^k}{\gamma^2 (1 + \beta \mu_0)^{k+3}} f(\mu_0, \mu'_0)$$

$$\times \left\{ 1 + \vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta} \frac{\gamma}{\theta_e} + \left[ -\frac{\beta_c^2 \gamma}{2 \theta_e} + (\vec{\beta}_c \cdot \vec{\beta})^2 \frac{\gamma^2}{2\theta_e^2} \right] \right\} e^{-u} dud\mu'_0 d\mu_0 \frac{d\varphi_0}{2\pi} \quad (3.113)$$

$$D \equiv \int_0^\infty \gamma^2 \beta e^{-u} \theta_e du \quad (3.114)$$

$$\gamma = 1 + \theta_e u \quad (3.115)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\theta_e u} \sqrt{\theta_e u + 2}}{1 + \theta_e u} \quad (3.116)$$

という形式に整理できる。

以上の計算から、以下のように整理することができる。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{\tau} &= \theta_e F_1 + \theta_e^2 F_2 + \theta_e^3 F_3 + \theta_e^4 F_4 + \theta_e^5 F_5 \\ &\quad - \beta_c \mu_c \left( \frac{1}{2} A_1 + \theta_e F_{13} + \theta_e^2 F_{14} + \theta_e^3 F_{15} + \theta_e^4 F_{16} \right) \\ &\quad + \beta_c^2 P_2(\mu_c) (F_{17} + \theta_e F_{18} + \theta_e^2 F_{19} + \theta_e^3 F_{20}) \\ &\quad + \beta_c^2 \left( \frac{1}{3} F_1 + \theta_e F_{22} + \theta_e^2 F_{23} + \theta_e^3 F_{24} \right) \end{aligned} \quad (3.117)$$

ただし、

$$\mu_c \equiv \cos \theta_c \quad (3.118)$$

$$P_2(\mu_c) = \frac{1}{2} (3\mu_c^2 - 1) \quad (3.119)$$

である。また、(3.117) 式の各項は、

$$F_1 = 2A_1 + \frac{1}{4}A_2 \quad (3.120)$$

$$F_2 = 5A_1 + \frac{47}{8}A_2 + \frac{21}{20}A_3 + \frac{7}{160}A_4 \quad (3.121)$$

$$F_3 = \frac{15}{4}A_1 + \frac{1023}{32}A_2 + \frac{217}{10}A_3 + \frac{329}{80}A_4 + \frac{11}{40}A_5 + \frac{11}{1920}A_6 \quad (3.122)$$

$$F_4 = -\frac{15}{4}A_1 + \frac{2505}{32}A_2 + \frac{3549}{20}A_3 + \frac{14253}{160}A_4 + \frac{9297}{560}A_5 + \frac{12059}{8960}A_6 + \frac{1}{21}A_7 + \frac{1}{1680}A_8 \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} F_5 &= \frac{135}{64}A_1 + \frac{30375}{512}A_2 + \frac{62391}{80}A_3 + \frac{614727}{640}A_4 + \frac{124389}{320}A_5 + \frac{355703}{5120}A_6 + \frac{2071}{336}A_7 + \frac{1879}{6720}A_8 \\ &\quad + \frac{11}{1792}A_9 + \frac{11}{215040}A_{10} \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$F_{13} = 5A_1 + \frac{47}{20}A_2 + \frac{7}{40}A_3 \quad (3.125)$$

$$F_{14} = \frac{25}{2}A_1 + \frac{1117}{40}A_2 + \frac{847}{80}A_3 + \frac{183}{160}A_4 + \frac{11}{320}A_5 \quad (3.126)$$

$$F_{15} = \frac{75}{8}A_1 + \frac{21873}{160}A_2 + \frac{49161}{320}A_3 + \frac{27519}{560}A_4 + \frac{1671}{280}A_5 + \frac{3917}{13440}A_6 + \frac{1}{210}A_7 \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned} F_{16} &= -\frac{75}{8}A_1 + \frac{10443}{32}A_2 + \frac{359079}{320}A_3 + \frac{938811}{1120}A_4 + \frac{130857}{560}A_5 + \frac{263259}{8960}A_6 + \frac{1193}{672}A_7 + \frac{167}{3360}A_8 \\ &\quad + \frac{11}{21504}A_9 \end{aligned} \quad (3.128)$$



$$F_{17} = \frac{1}{3}A_1 + \frac{11}{120}A_2 \quad (3.129)$$

$$F_{18} = 2A_1 + 3A_2 + \frac{3}{4}A_3 + \frac{19}{480}A_4 \quad (3.130)$$

$$F_{19} = 5A_1 + \frac{271}{10}A_2 + \frac{843}{40}A_3 + \frac{10603}{2240}A_4 + \frac{409}{1120}A_5 + \frac{23}{2688}A_6 \quad (3.131)$$

$$F_{20} = \frac{15}{4}A_1 + \frac{4929}{40}A_2 + \frac{39777}{160}A_3 + \frac{1199897}{8960}A_4 + \frac{549}{20}A_5 + \frac{4091}{1680}A_6 + \frac{941}{10080}A_7 + \frac{101}{80640}A_8 \quad (3.132)$$

$$F_{22} = 5A_1 + \frac{33}{8}A_2 + \frac{7}{10}A_3 + \frac{7}{240}A_4 \quad (3.133)$$

$$F_{23} = \frac{25}{2}A_1 + \frac{655}{16}A_2 + \frac{931}{40}A_3 + \frac{1337}{320}A_4 + \frac{11}{40}A_5 + \frac{11}{1920}A_6 \quad (3.134)$$

$$F_{24} = \frac{75}{8}A_1 + \frac{12255}{64}A_2 + \frac{23373}{80}A_3 + \frac{82631}{640}A_4 + \frac{12781}{560}A_5 + \frac{16207}{8960}A_6 + \frac{4}{63}A_7 + \frac{1}{1260}A_8 \quad (3.135)$$

という計算結果が得られ、(3.112) 式に  $\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$  掛けた関数の  $1 \leq k \leq 10$  までの計算結果は、

$$A_1 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}\tilde{S} \quad (3.136)$$

$$A_2 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \tilde{S}\tilde{X} \quad (3.137)$$

$$A_3 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = -2\tilde{S}\tilde{X}^2 - \tilde{S}^3 \quad (3.138)$$

$$A_4 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = 4\tilde{S}\tilde{X}^3 + 8\tilde{S}^3\tilde{X} \quad (3.139)$$

$$A_5 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = -8\tilde{S}\tilde{X}^4 - 44\tilde{S}^3\tilde{X}^2 - 8\tilde{S}^5 \quad (3.140)$$

$$A_6 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = 16\tilde{S}\tilde{X}^5 + 208\tilde{S}^3\tilde{X}^3 + 136\tilde{S}^5\tilde{X} \quad (3.141)$$

$$A_7 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = -32\tilde{S}\tilde{X}^6 - 912\tilde{S}^3\tilde{X}^4 - 1440\tilde{S}^5\tilde{X}^2 - 136\tilde{S}^7 \quad (3.142)$$

$$A_8 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = 64\tilde{S}\tilde{X}^7 + 3840\tilde{S}^3\tilde{X}^5 + 12288\tilde{S}^5\tilde{X}^3 + 3968\tilde{S}^7\tilde{X} \quad (3.143)$$

$$A_9 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = -128\tilde{S}\tilde{X}^8 - 15808\tilde{S}^3\tilde{X}^6 - 92928\tilde{S}^5\tilde{X}^4 - 68608\tilde{S}^7\tilde{X}^2 - 3968\tilde{S}^9 \quad (3.144)$$

$$A_{10} \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = 256\tilde{S}\tilde{X}^9 + 64256\tilde{S}^3\tilde{X}^7 + 652416\tilde{S}^5\tilde{X}^5 + 920576\tilde{S}^7\tilde{X}^3 + 176896\tilde{S}^9\tilde{X} \quad (3.145)$$

である。ただし、 $\tilde{X}$  と  $\tilde{S}$  は、

$$\tilde{X} \equiv x \coth\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3.146)$$

$$\tilde{S} \equiv \frac{x}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (3.147)$$

である。さらに、(3.113) 式の  $1 \leq k \leq 10$  までの計算は、

$$\begin{aligned} L_1 = & 2\theta_e + 5\theta_e^2 + \frac{15}{4}\theta_e^3 - \frac{15}{4}\theta_e^4 + \frac{135}{64}\theta_e^5 - \beta_c\mu_c \left( \frac{1}{2} + 5\theta_e + \frac{25}{2}\theta_e^2 + \frac{75}{8}\theta_e^3 - \frac{75}{8}\theta_e^4 \right) \\ & + \beta_c^2 P_2(\mu_c) \left( \frac{1}{3} + 2\theta_e + 5\theta_e^2 + \frac{15}{4}\theta_e^3 \right) + \beta_c^2 \left( \frac{2}{3} + 5\theta_e + \frac{25}{2}\theta_e^2 + \frac{75}{8}\theta_e^3 \right) \end{aligned} \quad (3.148)$$

$$L_2 = \frac{1}{4}\theta_e + \frac{47}{8}\theta_e^2 + \frac{1023}{32}\theta_e^3 + \frac{2505}{32}\theta_e^4 + \frac{30375}{512}\theta_e^5 - \beta_c\mu_c \left( \frac{47}{20}\theta_e + \frac{1117}{40}\theta_e^2 + \frac{21873}{160}\theta_e^3 + \frac{10443}{32}\theta_e^4 \right) + \beta_c^2 P_2(\mu_c) \left( \frac{11}{120} + 3\theta_e + \frac{271}{10}\theta_e^2 + \frac{4929}{40}\theta_e^3 \right) + \beta_c^2 \left( \frac{1}{12} + \frac{33}{8}\theta_e + \frac{655}{16}\theta_e^2 + \frac{12255}{64}\theta_e^3 \right) \quad (3.149)$$

$$L_3 = \frac{21}{20}\theta_e^2 + \frac{217}{10}\theta_e^3 + \frac{3549}{20}\theta_e^4 + \frac{62391}{80}\theta_e^5 - \beta_c\mu_c \left( \frac{7}{40}\theta_e + \frac{847}{80}\theta_e^2 + \frac{49161}{320}\theta_e^3 + \frac{359079}{320}\theta_e^4 \right) + \beta_c^2 P_2(\mu_c) \left( \frac{3}{4}\theta_e + \frac{843}{40}\theta_e^2 + \frac{39777}{160}\theta_e^3 \right) + \beta_c^2 \left( \frac{7}{10}\theta_e + \frac{931}{40}\theta_e^2 + \frac{23373}{80}\theta_e^3 \right) \quad (3.150)$$

$$L_4 = \frac{7}{160}\theta_e^2 + \frac{329}{80}\theta_e^3 + \frac{14253}{160}\theta_e^4 + \frac{614727}{640}\theta_e^5 - \beta_c\mu_c \left( \frac{183}{160}\theta_e^2 + \frac{27519}{560}\theta_e^3 + \frac{938811}{1120}\theta_e^4 \right) + \beta_c^2 P_2(\mu_c) \left( \frac{19}{480}\theta_e + \frac{10603}{2240}\theta_e^2 + \frac{1199897}{8960}\theta_e^3 \right) + \beta_c^2 \left( \frac{7}{240}\theta_e + \frac{1337}{320}\theta_e^2 + \frac{82631}{640}\theta_e^3 \right) \quad (3.151)$$

$$L_5 = \frac{11}{40}\theta_e^3 + \frac{9297}{560}\theta_e^4 + \frac{124389}{320}\theta_e^5 - \beta_c\mu_c \left( \frac{11}{320}\theta_e^2 + \frac{1671}{280}\theta_e^3 + \frac{130857}{560}\theta_e^4 \right) + \beta_c^2 P_2(\mu_c) \left( \frac{409}{1120}\theta_e^2 + \frac{549}{20}\theta_e^3 \right) + \beta_c^2 \left( \frac{11}{40}\theta_e^2 + \frac{12781}{560}\theta_e^3 \right) \quad (3.152)$$

$$L_6 = \frac{11}{1920}\theta_e^3 + \frac{12059}{8960}\theta_e^4 + \frac{355703}{5120}\theta_e^5 - \beta_c\mu_c \left( \frac{3917}{13440}\theta_e^3 + \frac{263259}{8960}\theta_e^4 \right) + \beta_c^2 P_2(\mu_c) \left( \frac{23}{2688}\theta_e^2 + \frac{4091}{1680}\theta_e^3 \right) + \beta_c^2 \left( \frac{11}{1920}\theta_e^2 + \frac{16207}{8960}\theta_e^3 \right) \quad (3.153)$$

$$L_7 = \frac{1}{21}\theta_e^4 + \frac{2071}{336}\theta_e^5 - \beta_c\mu_c \left( \frac{1}{210}\theta_e^3 + \frac{1193}{672}\theta_e^4 \right) + \beta_c^2 P_2(\mu_c) \frac{941}{10080}\theta_e^3 + \beta_c^2 \frac{4}{63}\theta_e^3 \quad (3.154)$$

$$L_8 = \frac{1}{1680}\theta_e^4 + \frac{1879}{6720}\theta_e^5 - \beta_c\mu_c \frac{167}{3360}\theta_e^4 + \beta_c^2 P_2(\mu_c) \frac{101}{80640}\theta_e^3 + \beta_c^2 \frac{1}{1260}\theta_e^3 \quad (3.155)$$

$$L_9 = \frac{11}{1792}\theta_e^5 - \beta_c\mu_c \frac{11}{21504}\theta_e^4 \quad (3.156)$$

$$L_{10} = \frac{11}{215040}\theta_e^5 \quad (3.157)$$

という結果が得られた。

(3.117) 式に (3.120) 式から (3.145) 式を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n(x)}{\tau} &= \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \theta_e (Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4) \\ &+ \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \beta_c^2 (B_0 + \theta_e B_1 + \theta_e^2 B_2 + \theta_e^3 B_3) \\ &+ \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \beta_c \mu_c (C_0 + \theta_e C_1 + \theta_e^2 C_2 + \theta_e^3 C_3 + \theta_e^4 C_4) \\ &+ \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \beta_c^2 P_2(\mu_c) (D_0 + \theta_e D_1 + \theta_e^2 D_2 + \theta_e^3 D_3) \end{aligned} \quad (3.158)$$

のようにまとめることができる。我々による展開計算結果と上式 (3.158) が一致するか否かを確認したところ、

熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に対応する我々の計算結果、すなわち、 $(Y_0$  から  $Y_4$  までの展開計算結果が上述した計算結果と一致しており、さらに、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に対応する我々の計算結果、すなわち、 $B_0$  から  $B_3$ 、 $C_0$  から  $C_4$ 、 $D_0$  から  $D_3$  までの展開計算結果も上述した計算結果と一致

していることを確認できた。

#### Shimon と Rephaeli による計算との比較のまとめ

Shimon と Rephaeli [12] の運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算結果と比較してみると、彼らの展開の誤差は、近似が良くなる低周波数側で収束をせず、また、ほぼ周波数の全域で誤差が水平を保っている様子が分かる。具体的には、低周波数側でさえ、5 keV のときは 1%、10 keV のときは 2%、15 keV のときは 3% の誤差であるという結果が得られた。これらのことから推測すると、計算の精度が関わる問題ではなく、解法自体に間違いが生じていると考えられる。そこで、彼らの運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算を見直したところ、既に CMB 系への変換がされている式に対して、銀河団座標系で表わされた変数で表わされた式であると考え、余分な変換ファクター  $\gamma_c (1 - \beta_c \cdot \beta)$  が掛けられてしまったことが分かった。それが、値のずれの原因であり、そのファクターを除いて展開すれば、我々の結果と一致することが確認できた。さらに、念のため、彼らの間違い箇所を修正した式、すなわち、p.156 の (3.98) 式の数値積分を実行して、我々の数値積分結果と比較したところ、我々が計算した周波数範囲 ( $0 \leq X \leq 15$ ) において、6 桁目まで数値が一致することが確認できた。この 6 桁目という数字は、我々が用いているガウス積分の精度のオーダーであるから、ほぼ一致していると判断しても差し支えない。

### 3.5 運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のまとめ

この章では、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果について記述した。

熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に対して、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果による強度の歪みは小さいが、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果が現れないクロスオーバー周波数でピークを持つため、観測精度が上がれば、十分に観測できると考えられる。また、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を温度に換算すると、 $\Delta T \sim -10^{-3}$  K となる。よって、 $T_0 \simeq 2.726$  K に対して、 $\sim$ mK のオーダーの温度揺らぎである。銀河団が  $z$  軸 (視線方向) に沿って近づいてくる場合、その速度を典型的な値として、 $v = 1000 \text{ km s}^{-1}$ 、 $\tau = 0.01$  を代入すると、宇宙背景放射の温度  $T_0 = 2.726$  K に対して、 $\Delta T \sim 10^{-4}$  K 程度の温度揺らぎである。よって、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に比べて一桁程小さい効果であることがわかる。

また、銀河団の固有速度の視線方向成分が観測者の方向を向いている場合、周波数全域で正の値をとり、視線方向成分が観測者と反対側を向いている場合は、周波数全域で負の値をとるという特徴がある。例として、銀河団の固有速度方向に対して、視線方向成分が成す角度が  $\theta_\gamma = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi$  である方向から、一つの銀河団において運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測をした場合の計算結果から、固有速度の視線方向成分が観測者の方向を向いている場合は正、逆方向を向いている場合は負になることが確認できた。そして、固有速度に対して垂直の方向は、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の大きさがゼロであることも分かった。さらに、視線方向成分の大きさに比例して、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の大きさが増加しているということが分かった。

相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の結果と同様に、高温且つ高周波数側で、相対論的補正の寄与が大きくなっていることが分かった。そして、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に比べ、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の寄与が小さい成分だが、クロスオーバー周波数で、寄与が増大することが確認できた。また、今回ではじめて行われた内容は、近い将来の観測による検出に期待がかかることを踏まえた運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の高次展開と、これまで計算されなかった運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の厳密数値積分である。その結果を用いて、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式の精度を確認した。すると、高次の項を取り入れることにより、厳密な値に近付いていくことが分かった。さらに、銀河団が高温になるにつれて、より低い次数の展開計算ほど厳密な値から離れていく様子が分かる。この結果は、少なくともここで調べた範囲内では、高次の項を取り入れることが重要であることを示している。最後に、銀河団の温度に対する精度の動きを調べた結果、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、 $X \leq 15$  ( $\nu \leq 853$  GHz) の範囲で約 1% 以内に収まっており、15 keV の場合は、高周波数側で近似が悪くなっている。 $X \leq 10$  ( $\nu \leq 568$  GHz) の範囲では、部分的に 1% ラインを割っているのだが、全体的に約 1% 以内に収まっている。結果として、我々の展開式は、精度としては大変有効であると考えられる。

一方、Shimon と Rephaeli [12] の運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算結果と比較してみると、彼らの展開の誤差は、近似が良くなる低周波数側で収束をせず、また、ほぼ周波数の全域で誤差が水平を保っている様子が分かる。具体的には、低周波数側でさえ、5 keV のときは 1%、10 keV のときは 2%、15 keV のときは 3% の誤差であるという結果が得られた。これらのことから推測すると、計算の精度に関わる問題ではなく、解法自体に間違いが生じている可能性があり、そこで、彼らの運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算を見直したところ、既に CMB 系への変換がされている式に対して、銀河団座標系の変数で表わされた式であると考え、余分な変換ファクター  $\gamma_c(1 - \beta_c \cdot \beta)$  が掛けられてしまったことが分かった。それが、値のずれの原因であり、そのファクターを除いて展開すれば、我々の結果と一致することが確認できた。

## 第4章 まとめ

1964年、ベル電話会社研究所で、雑音電波の観測をしていた Arno Allan Penzias と Robert Woodrow Wilson という二人の研究者による宇宙背景放射の発見から始まり、現在では、その宇宙背景放射の研究や X 線観測を含めた銀河団の研究とともに、スニャエフ・ゼルドビッチ効果の理論的研究及び観測的研究が発展しつつある。その効果の予言者は、その名に記されているとおり、Sunyaev と Zeldovich である。これらは、宇宙物理学に重要な寄与を与えている。しかし、容易にここまで辿り着いたわけではなく、大変険しい道のりであった。

スニャエフ・ゼルドビッチ効果は、銀河団内部の温度構造や銀河団の進化の手掛かりが得られるとされている。さらに、X 線観測とスニャエフ・ゼルドビッチ効果の電波観測とを組み合わせることによって、重要なパラメータが推定される。一つの銀河団から得られる観測量は、スニャエフ・ゼルドビッチ効果による電波強度変化量、X 線輻射強度、銀河団プラズマ温度、銀河団の見かけの角半径である。これら四つの観測量から銀河団までの距離の決定が可能となる。さて、距離が決定すると、銀河団の赤方偏移の測定からもとめられる銀河団の後退速度を用いて、重要な宇宙論パラメータであるハッブル定数を計算することができる。ここで、銀河団に対して球形であるという仮定をしているため、系統誤差が発生するが、数多くの銀河団についてハッブル定数を求めて平均的な値(統計平均)を求めれば、系統誤差を抑えることができる。また、特に運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の検出ができれば、銀河団の固有速度の視線方向成分を特定することができ、それにより、近傍の重力ポテンシャルの様子を知る手がかりが得られる。そして、それを多くの銀河団について行うことができれば、宇宙に分布する銀河団の固有速度マップが得られ、宇宙の構造形成についての解明をするうえで、重要な手がかりになると考えられる。さらに、スニャエフゼルドビッチ効果の大きさは、赤方偏移パラメータに依存しないため、遠方銀河団の観測に有利であるという利点を持っている。

そのような魅力的な分野ではあったのだが、観測では、微量の検出という難題に直面していた。この難題は画期的な発想を基に、電波干渉計を用いた電波観測によって克服された。そして、現在は、さらに観測が難しいとされる運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の検出が期待されるに至るまで、観測技術が進歩しつつある。高温の銀河団が発見されて、観測の方面だけでなく、理論の方面でも変化があった。それまで、Sunyaev と Zeldovich [3, 5] による非相対論的な計算が行われていたが、高温銀河団内の電子に対して相対的な効果を見逃すことができないという動きが始め、相対論的に計算されたスニャエフ・ゼルドビッチ効果が導かれた。このスニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算について、この論文により記述してきたわけである。その結果や考察を以下にまとめる。

2章では、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果について記述した。

まず、2.2 と 2.3 において、1 回散乱を仮定した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の非相対論的計算と、その相対論的計算及びその計算手法である展開計算と数値積分の比較について記述した。展開計算は、 $Y_4$  までの補正項を含めた展開式の計算である。それらの結論は、次に述べる内容である。

この効果は、低エネルギー側では強度が減少し、高エネルギー側では強度が増加するという特性を持って

いる。また、一般的な銀河団の温度  $k_B T_e = 10$  keV と典型的な銀河団の光学的深さ  $\tau = 0.01$  である場合で、この効果を温度に換算すると、 $\Delta T \sim -10^{-3}$  K となる。このことから、 $T_0 \simeq 2.726$  K に対して、 $\sim$ mK のオーダーの寄与を与えている。

非相対論的計算による熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と相対論的計算による熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を計算し、比較した。高周波側且つ高温では相対論的補正の効果が無視できないことが確認できた。さらに、クロスオーバー周波数の温度依存性の寄与から、相対論的補正をしないことによる周波数のズレが、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の極値からのズレを生じる原因となるため、観測に対して致命的な打撃を与えることが分かった。相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式を導出した。数値積分による厳密解との相対誤差は、低周波数領域では収束しているから、展開計算が正しく行われていることが示された。周波数の各領域ごとに精度を確かめてみると、クロスオーバー周波数付近では、誤差が比較的大きくなっているが、その領域は、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の値がゼロに近づく領域であることが原因である。そして、低周波数領域に対し、高周波数領域では、精度が悪くなっていることが分かる。銀河団の温度に対する精度の動きを調べた結果、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、 $X \leq 15$  ( $\nu \leq 853$  GHz) の範囲で約 1% 以内に収まっている。そして、15 keV の場合は、高周波数側で近似が悪くなっている。 $X \leq 10$  ( $\nu \leq 568$  GHz) の範囲では、部分的に 1% ラインを割っているのだが、約 1% 以内に収まっている。結果として、我々の展開式は、精度としては大変有効であると考えられる。

次に、2.4 において、1 回散乱の展開計算を拡張してさらに高次の展開、すなわち、 $Y_{10}$  までの補正項を含めた熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開計算と数値積分の比較について記述した。それらの結論は、次に述べる内容である。

銀河団温度が 5 keV と 10 keV の場合は、より高次の項まで展開した方が厳密解との誤差が小さくなる傾向を示している。そして、15 keV の場合でも、低周波数側では高次まで展開した方が厳密解との誤差が小さくなる傾向を示しているが、高周波数側では、むしろ微小に誤差が大きくなっている領域がある。数値積分による厳密解との相対誤差は、低周波数領域では、かなりの精度で厳密解と一致している事がわかる。クロスオーバー周波数付近である  $X = 4$  辺りの領域では誤差が大きくなっているが、次数を増やしていくことにより、精度の悪化が抑えられている。最後に  $X > 4$  の高周波数領域を見てみると、特に高温の場合に展開式は非常に収束が遅く、低周波数領域と比べると、精度が落ちてしまっている。銀河団の温度に対する精度の動きを調べた結果、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、 $X \leq 15$  ( $\nu \leq 853$  GHz) の範囲で約 1% 以内に収まっている。そして、15 keV の場合は、高周波数側で近似が悪くなっているが、 $X \leq 11$  ( $\nu \leq 625$  GHz) の範囲では、約 1% 以内に収まっている。高周波数側で近似が悪くなる傾向は同じだが、 $Y_4$  までの補正項で止めた結果に比べると、全体的に精度が増していることが分かる。結果としては、展開式の精度としては大変有効であると考えられるが、解析式が長いという欠点がある。

さらに、2.5 において、1 回散乱の高次展開計算を拡張して、2 回散乱を考慮した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開計算と数値積分の比較について記述した。ここでの展開計算は、 $Z_{10}$  までの補正項を含めた展開式の計算である。それらの結論は、次に述べる内容である。

高周波側且つ高温では相対論的補正の効果が顕著に表れていた。この効果は、光学的深さや電子温度など、現実的な銀河団のパラメータを考慮すると、かなり小さい値になると思われる。さらに、図 2.32 から、 $0 \leq X \leq 15$  の領域の 2 回散乱成分は、1 回散乱に対して全体的に  $|\Gamma| < 0.5\%$  以下の寄与を与えるぐらいであり、現状としては、2 回散乱成分による揺らぎの補正を考慮する必要性は薄いと考えられる。銀河団の温度に対する精度の動きを調べた結果、銀河団の温度が低温の場合は、 $X \ll 15$  ( $\nu \ll 853$  GHz) の領域全体

で精度が良く、より高次の項まで含めた方が、高精度の数値結果が得られた。一方、銀河団の温度が高温の場合は、 $X < \sim 2.5$  ( $\nu < \sim 142$  GHz) の領域では、誤差が 1% 以内に収まったが、それより高周波数側では精度が悪く、さらに高次の項を含めても精度が向上しないか、あるいは、逆に精度が悪化するという結果が得られた。しかも、10 keV と 15 keV の精度の比較から、高温になるにつれて、展開次数を上げることによる精度の悪化の仕方が激しくなっていくことが分かった。これらの解析から、結果として、展開式の精度としては有効とは言えない精度であるが、そもそも、2 回散乱の寄与は大変小さく、無視しても差し支えないと考えられる。

3 章では、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果について記述した。

まず、3.2 と 3.3 において、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の非相対論的計算と、その相対論的計算及びその計算手法である展開計算と数値積分の比較について記述した。後者である相対論的計算は、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算式を拡張した計算である。それらの結論は、次に述べる内容である。熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に対して、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果による強度の歪みは小さいが、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果が現れないクロスオーバー周波数でピークを持つため、観測精度が上がれば、十分に観測できると考えられる。銀河団が  $z$  軸 (視線方向) に沿って近づいてくる場合、その速度を典型的な値として、 $v = 1000 \text{ km s}^{-1}$ 、 $\tau = 0.01$  を代入すると、宇宙背景放射の温度  $T_0 = 2.726 \text{ K}$  に対して、 $\Delta T \sim 10^{-4} \text{ K}$  程度の温度揺らぎである。よって、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に比べて一桁程小さい効果であることがわかる。また、銀河団の固有速度の視線方向成分が観測者の方向を向いている場合、周波数全域で正の値をとり、視線方向成分が観測者と反対側を向いている場合は、周波数全域で負の値をとるという特徴がある。例として、ある一つの銀河団を様々な方面から、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測をした場合の計算結果から、固有速度の視線方向成分が観測者の方向を向いている場合は正、逆方向を向いている場合は負になることが確認できた。そして、固有速度に対して垂直の方向は、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の大きさがゼロであることも分かった。さらに、視線方向成分の大きさに比例して、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の大きさが増加しているということが分かった。

相対論的に計算した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の結果と同様に、高温且つ高周波数側で、相対論的補正の寄与が大きくなっていることが分かった。そして、熱的 SZ 効果に比べ、運動学的効果の寄与が小さい成分だが、クロスオーバー周波数で、寄与が増大することが確認できた。また、今回ではじめて行われた内容は、近い将来の観測による検出に期待がかかることを踏まえた運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の高次展開と、これまで計算されなかった運動学的 SZ 効果の厳密数値積分である。その結果を用いて、運動学的 SZ 効果の展開式の精度を確認した。すると、高次の項を取り入れることにより、厳密な値に近付いていくことが分かった。さらに、銀河団が高温になるにつれて、より低い次数の展開計算ほど厳密な値から離れていく様子が分かった。この結果は、少なくともここで調べた範囲内では、高次の項を取り入れることが重要であることを示している。最後に、銀河団の温度に対する精度の動きを調べた結果、銀河団の温度が 5 keV と 10 keV の場合は、 $X \leq 15$  ( $\nu \leq 853$  GHz) の範囲で約 1% 以内に収まっており、15 keV の場合は、高周波数側で近似が悪くなっている。 $X \leq 10$  ( $\nu \leq 568$  GHz) の範囲では、部分的に 1% ラインを割っているのだが、全体的に約 1% 以内に収まっている。結果として、我々の展開式は、精度としては大変有効であると考えられる。

次に、3.4 において、Shimon と Rephaeli による運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開計算との不一致が確認されていたが、我々による展開計算と数値積分の値を用いて、彼らによる結果との比較を行い、不一致の原因について考えてみた。それらの結論は、次に述べる内容である。Shimon と Rephaeli [12] の運

動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算結果と比較してみると、彼らの展開の誤差は、近似が良くなるはずの低周波数側で収束をせず、また、ほぼ周波数の全域で誤差が水平を保っている様子が分かる。具体的には、低周波数側でさえ、5 keV のときは1%、10 keV のときは2%、15 keV のときは3%の誤差であるという結果が得られた。これらのことから推測すると、計算の精度に関わる問題ではなく、解法自体に間違いが生じている可能性があり、そこで、彼らの運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算を見直したところ、既にCMB系への変換がされている式に対して、銀河団座標系での変数で表わされた式であると考え、余分な変換ファクター  $\gamma_c(1 - \beta_c \cdot \beta)$  が掛けられてしまったことが分かった。それが、値のずれの原因であり、そのファクターを除いて展開すれば、我々の結果と一致することが確認できた。

これまで紹介した我々の展開式のうち、1998年の伊藤、神山、野澤 [8] による結果や、同年の野澤、伊藤、神山 [9] による結果は、実際観測のグループ (Benson ら [20] や Carlstrom ら [37] 等) によって活用され、観測分野にも貢献した。これらに加え、我々のグループである野澤、伊藤、須田、大畑 [13] が計算した運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の理論的解析式が、近い将来の運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測に活用され、さらに、スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測のみならず、宇宙物理学への発展に大きく寄与することを願うばかりである。



# 研究業績

## 発表論文

1. “ An Improved Formula for the Relativistic Corrections to the Kinematical Sunyaev-Zeldovich Effect for Clusters of Galaxies ”  
S. Nozawa, N. Itoh, Y. Suda and Y. Ohhata:  
Nuovo Cimento **121 B**, 487-500 (2006)

## 口頭発表

1. 2006年 日本天文学会「2006年春季年会」(和歌山大学) 2006年3月27日  
「厳密数値積分法による運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の計算」  
大畑 洋一、須田 康彦、伊藤 直紀、野澤 智

## 謝辞

最後に、研究を進めるにあたり、様々な面からご指導いただきました当研究室の伊藤直紀教授と共同研究者である城西女子短期大学の野澤智教授へ心から深く感謝の意を表し、この場をお借りして厚く御礼申し上げます。

この研究室から得た多大なる知識と経験は、大変意義深いものでありました。毎週の月曜日、火曜日、水曜日の朝から行われるミーティングでは、研究の進行方法に対する多大なご指導をいただき、研究を行うことの大変さと面白さを学ぶことが出来ました。さらに、その場で課された論文速報からは、我々の研究分野を含む宇宙物理学における様々な研究分野の研究状況について学ぶことができ、宇宙物理学に対する知的好奇心が養われ、健全な研究姿勢を育むことが出来ました。毎週の木曜日に開かれるゼミの場においては、伊藤直紀教授と野澤教授により、研究結果の内容や発表方法、そして、その後の研究の進行方法に対する多くのコメントを頂きました。特に、野澤教授から、詳細な計算手法やプログラムに対するコメントを頂きました。そして、伊藤教授から、Shimon & Repaheli [12] とのメールでの議論という貴重な機会を与えて下さり、さらに、議論に対する厳しくも暖かいご指導を頂きました。また、同研究室の共同研究の大学院生である須田君とは、研究分野を含め宇宙物理学に関連した内容についての様々な議論をすることが出来ました。同研究室の後輩の方々とも、有意義な議論を重ねることが出来ました。これらの経験と合わせ、物理学科コロキウムや学会での発表を通して、公の場での発表についての多くの貴重な知識と経験、さらに、ある目的に対して共同研究者と自身が一丸となって取り組むという経験は、今後の社会生活への、一つの重要な基盤となったと考えております。その他、物理学科の先生方や、以前、当研究室の助手をされていた和南城先生からは、重要な助言や暖かい励ましの御言葉を頂きました。そして、物理学科事務室の職員の方である庄司義治さんからは、円滑に大学院生活を送ることができる健全な環境を整えて下さり、多大なご支援を頂きました。

このように、様々な場において、伊藤直紀教授を始めとする多くの方々から大変貴重なご支援及び経験を授かり、大学院生として有意義な研究生生活の日々を送ることが出来ましたことに対し、この上ない幸せを感じております。各位へ心から深く感謝の意を表し、この場をお借りして厚く御礼申し上げます。さらに、大学での勉強及び大学院での研究という機会を惜しみなく提供し、様々な側面から支えてくれた両親に深く感謝したいと思います。

# 付録 A 熱的スニャエフ・ゼルビッチ効果の詳細な計算

計算する上での設定

1. 銀河団内の電子ガスは非常に希薄 ( $\sim 10^{-3}\text{cm}^{-3}$ ) であるため、一回散乱についてのみ考える。
2. 銀河団内の電子ガスは等温・均一に分布していると仮定する。
3. 銀河団内の電子の縮退は無視している。
4. 「'」は、散乱後の終状態であることを表す。
5. 自然単位系 ( $c = 1, \hbar = 1$ ) を用いている。

te

## A.1 ボルツマン方程式の計算と数値積分について

ここでは、ボルツマン方程式の数値積分計算について記述する。銀河団の中心に座標の原点を置き、光子の分布関数  $n(\omega)$  に対するボルツマン方程式は、

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W \{n(\omega) [1 + n(\omega')] f(E) - n(\omega') [1 + n(\omega)] f(E')\} \quad (\text{A.1})$$

$$W = \frac{(e^2/4\pi)^2 \bar{X} \delta^4(p + k - p' - k')}{2\omega\omega' E E'} \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{X} = -\left(\frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa}\right) + 4m^4 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'}\right)^2 - 4m^2 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'}\right) \quad (\text{A.3})$$

$$\kappa = -2(p \cdot k) = -2\omega E \left(1 - \frac{|\mathbf{p}|}{E} \cos \alpha\right) \quad (\text{A.4})$$

$$\kappa' = 2(p \cdot k') = 2\omega' E \left(1 - \frac{|\mathbf{p}|}{E} \cos \alpha'\right) \quad (\text{A.5})$$

と記述される。ここで、 $W$  は、コンプトン散乱の遷移確率を表している ( $\bar{X}$  の導出は、付録 D を参照。)。 (A.1) 式は、電子との散乱で、周波数が  $\omega \rightarrow \omega'$  と変化する光子から、 $\omega' \rightarrow \omega$  と変化する光子を差し引いている形で表されている。

散乱前後での電子及び光子の 4 元運動量をそれぞれ、

$$p = (E, \mathbf{p}) \quad (\text{A.6})$$

$$k = (\omega, \vec{k}) \quad (\text{A.7})$$

$$p' = (E', \mathbf{p}') \quad (\text{A.8})$$

$$k' = (\omega', \vec{k}') \quad (\text{A.9})$$

と表せる。

入射光子の伝播方向を  $z$  軸の正方向にとると、

$$\mathbf{p} = p (\sin \theta_p \cos \phi_p, \sin \theta_p \sin \phi_p, \cos \theta_p) \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{k} = \omega (0, 0, 1) \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{p}' = p' (\sin \theta_{p'} \cos \phi_{p'}, \sin \theta_{p'} \sin \phi_{p'}, \cos \theta_{p'}) \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{k}' = \omega' (\sin \theta_{\gamma'} \cos \phi_{\gamma'}, \sin \theta_{\gamma'} \sin \phi_{\gamma'}, \cos \theta_{\gamma'}) \quad (\text{A.13})$$

$\theta_p$  :  $\mathbf{p}$  と  $\vec{k}$  のなす角度

$\theta_{p'}$  :  $\mathbf{p}'$  と  $\vec{k}$  のなす角度

$\theta_{\gamma'}$  :  $\vec{k}'$  と  $\vec{k}$  のなす角度

$\theta'_p$  :  $\mathbf{p}$  と  $\vec{k}'$  のなす角度

$$\cos \theta'_p = \cos \theta_p \cos \theta_{\gamma'} + \sin \theta_p \sin \theta_{\gamma'} \cos (\phi_p - \phi_{\gamma'}) \quad (\text{A.14})$$

である。(A.4)、(A.5) 式において、 $\alpha \equiv \theta_p$ 、 $\alpha' \equiv \theta'_p$  である。また、電子と光子の座標上の位置や運動方向は、図 A.1 のように考えている。

散乱前後での電子の分布関数は、それぞれ、

$$f(E) = e^{-(E-m)/k_B T_e} e^{(\mu-m)/k_B T_e} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} f(E') &= e^{-(E'-m)/k_B T_e} e^{(\mu-m)/k_B T_e} \\ &= f(E) e^{(E-E')/k_B T_e} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

である。ただし、

$$\begin{cases} E & : \text{電子の静止エネルギーを含めた全エネルギー} \\ m & : \text{電子の静止エネルギー} \\ \mu & : \text{電子の静止エネルギーを含めた化学ポテンシャル} \end{cases}$$

である。

電子の温度で無次元化した宇宙背景放射の周波数として、

$$x \equiv \frac{\hbar\omega}{k_B T_e} = \frac{\omega}{k_B T_e} \quad (\text{A.17})$$

$$\Delta x \equiv \frac{\omega' - \omega}{k_B T_e} \quad (\text{A.18})$$

と定義する。散乱前後での運動エネルギーと運動量の保存により、

$$\begin{cases} E + \omega & = E' + \omega' \\ \mathbf{p} + \vec{k} & = \mathbf{p}' + \vec{k}' \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

# 電子と光子の散乱

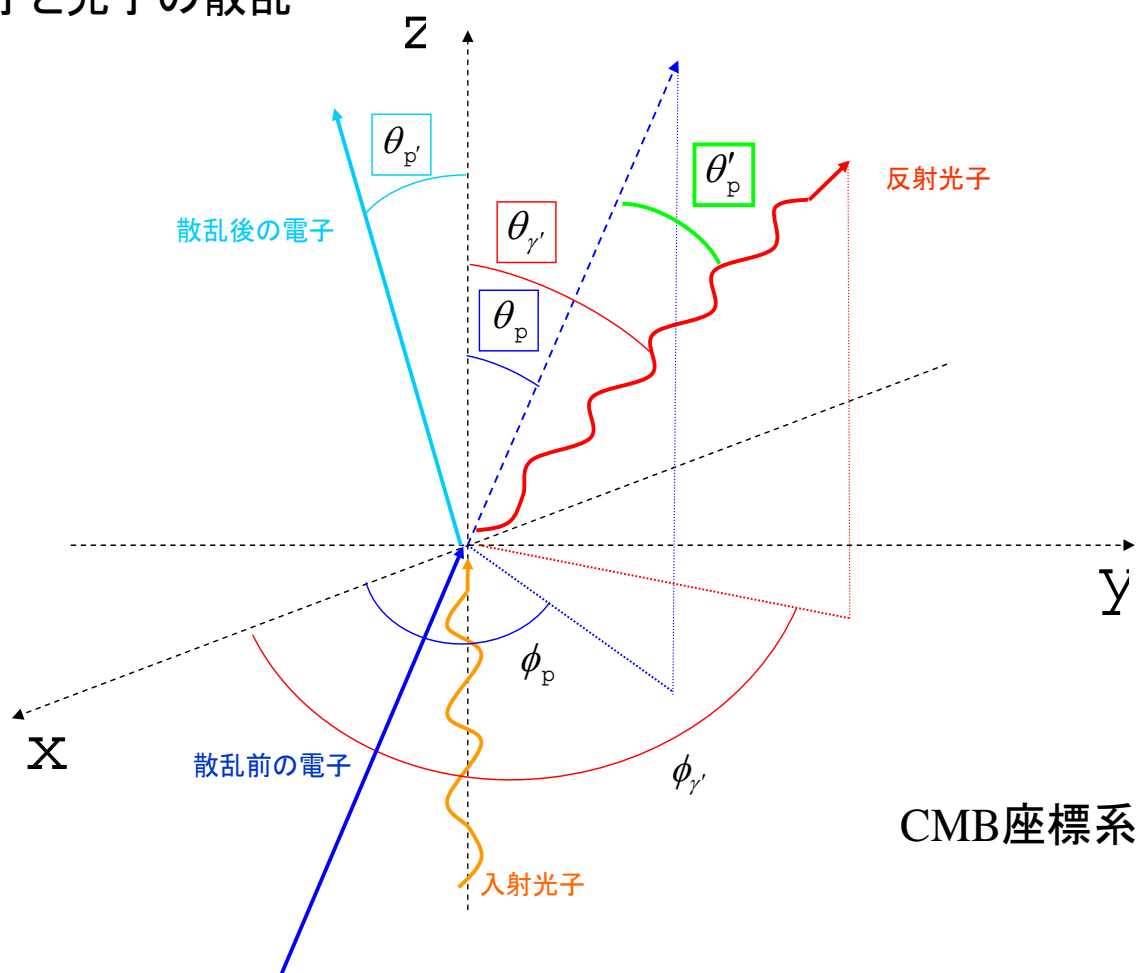


図 A.1: 電子と光子の座標上の位置や運動方向の概略図

であることを用いると、

$$E - E' = \omega' - \omega \quad (\text{A.20})$$

$$e^{(E-E')/k_B T_e} = e^{\Delta x} \quad (\text{A.21})$$

となる。(A.15)、(A.16)、(A.21) 式を用いて、(A.1) 式を変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \\ &\times \{n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x}\} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

となる。そして、(C.2) 式の  $W$  を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p' d^3 k' \bar{X}}{2\omega\omega' E E'} \delta^4(p+k-p'-k') f(E) \\ &\times \{n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x}\} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

を得る。ここで、 $\delta$  関数の部分について、

$$\frac{d^3 p'}{2E'} = \int_0^\infty dp'_0 \delta(p'_\mu p'^\mu - m^2) d^3 p' \quad (\text{A.24})$$

という関係式 (等式の証明は A.4.1 を参照) を適用すると、

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 p'}{2E'} \delta^4(p+k-p'-k') &= \int_0^\infty d^4 p' \delta(p'_\mu p'^\mu - m^2) \delta^4(p+k-p'-k') \\ &= \delta(p'^2 - m^2) \Big|_{p'=p+k-k'} \\ &= \delta[(p+k-k')^2 - m^2] \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

となる。また、自然単位系を用いているから、

$$\begin{aligned} d^3 k' &= k'^2 dk' d\Omega_{k'} \\ &= \omega'^2 d\omega' d\Omega_{\omega'} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

であるので、(A.23) 式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E\omega} \int d\Omega_{k'} \int d\omega' \omega' \delta[(p+k-k')^2 - m^2] f(E) \bar{X} \\ &\times \{n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x}\} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

と変形できる。

$\mathbf{p}$  と  $\vec{k}$ 、 $\mathbf{p}$  と  $\vec{k}'$ 、 $\vec{k}$  と  $\vec{k}'$  のなす角度はそれぞれ  $\theta_p$ 、 $\theta'_p$ 、 $\theta_{\gamma'}$  であるから、

$$\begin{aligned} (p+k-k')^2 - m^2 &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}' - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - m^2 \\ &= E^2 - |\mathbf{p}|^2 + \omega^2 - |\vec{k}|^2 + \omega'^2 - |\vec{k}'|^2 + 2(E\omega - |\mathbf{p}| |\vec{k}| \cos \theta_p) \\ &\quad - 2(E\omega' - |\mathbf{p}| |\vec{k}'| \cos \theta'_p) - 2(\omega\omega' - |\vec{k}| |\vec{k}'| \cos \theta_{\gamma'}) - m^2 \\ &= E^2 - (p^2 + m^2) + 2\omega(E - p \cos \theta_p) \\ &\quad - 2\omega'(E - p \cos \theta'_p) - 2\omega\omega'(1 - \cos \theta_{\gamma'}) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

となる。ここで、 $E = \sqrt{p^2 + m^2}$  を用いると、

$$(p + k - k')^2 - m^2 = 2\omega(E - p \cos \theta_p) - 2\omega' [E + \omega(1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta'_p] \quad (\text{A.29})$$

が得られる。また、以下の関係式、

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x), \quad |c| \neq 0 \quad (\text{A.30})$$

を用いて、

$$\begin{aligned} & \delta[(p + k - k')^2 - m^2] \\ &= \delta \left\{ -2 [E + \omega(1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta'_p] \left[ \omega' - \frac{\omega(E - p \cos \theta_p)}{E + \omega(1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta'_p} \right] \right\} \\ &= \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{E + \omega(1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta'_p} \right| \delta \left[ \omega' - \frac{\omega(E - p \cos \theta_p)}{E + \omega(1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta'_p} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{E + \omega(1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta'_p} \delta \left[ \omega' - \frac{\omega(E - p \cos \theta_p)}{E + \omega(1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta'_p} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= - \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} \int d\Omega_{k'} \frac{\omega'}{\omega} \frac{1}{E + \omega(1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta'_p} f(E) \bar{X} \\ &\quad \times \{ n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x} \} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\omega' = \frac{\omega(E - p \cos \theta_p)}{E + \omega(1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta'_p} \quad (\text{A.33})$$

という結果が得られる。。積分変数を具体的に表すと、

$$\int d^3 p \int d\Omega_{k'} = \int_0^\infty dp p^2 \int_0^\pi d\theta_p \sin \theta_p \int_0^{2\pi} d\phi_p \int_0^\pi d\theta_{\gamma'} \sin \theta_{\gamma'} \int_0^{2\pi} d\phi_{\gamma'} \quad (\text{A.34})$$

である。そして、トムソン散乱断面積は、

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{4\pi m} \right)^2 \quad (\text{A.35})$$

であるから、

$$\left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 = \sigma_T \frac{3}{8\pi} m^2 \quad (\text{A.36})$$

である。これらを用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -\sigma_T \frac{3}{8\pi} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp p^2 \left( \frac{m}{E} \right)^2 f(E) \\ &\quad \times \int_0^\pi d\theta_p \sin \theta_p \int_0^\pi d\theta_{\gamma'} \sin \theta_{\gamma'} \int_0^{2\pi} d\phi_p \int_0^{2\pi} d\phi_{\gamma'} \\ &\quad \times \frac{\omega'}{\omega} \frac{\bar{X}}{1 + \frac{\omega}{E}(1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \\ &\quad \times \{ n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x} \} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

となる。ここで、A.2.1 より、

$$f(E) = N_e \frac{\pi^2}{m^3} \theta_e^{-\frac{3}{2}} g(\theta_e) e^{-(E-m)/k_B T_e} \quad (\text{A.38})$$

である。ただし、

$$\theta_e \equiv \frac{k_B T_e}{mc^2} \quad (\text{A.39})$$

と定義している。A.2.1 で行われている変数変換と同様に、 $p = \sqrt{E^2 + m^2}$ 、 $K \equiv E - m$  と定義し、 $u \equiv K/k_B T_e$  への変数変換を行うと、

$$\begin{aligned} dp p^2 &= dK(K+m) \sqrt{K(K+2m)} \\ &= m^3 \frac{k_B T_e}{m} du \left( \frac{k_B T_e}{m} u + 1 \right) \sqrt{\frac{k_B T_e}{m} u \left( \frac{k_B T_e}{m} u + 2 \right)} \\ &= m^3 \theta_e^{\frac{3}{2}} du (\theta_e u + 1) \sqrt{u(\theta_e u + 2)} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

$$f(E) = N_e \frac{\pi^2}{m^3} \theta_e^{-\frac{3}{2}} g(\theta_e) e^{-u} \quad (\text{A.41})$$

となる。これらを用いて、

$$dp p^2 f(E) = N_e \pi^2 g(\theta_e) du (\theta_e u + 1) \sqrt{u(\theta_e u + 2)} e^{-u} \quad (\text{A.42})$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -\frac{3}{4} \sigma_T N_e g(\theta_e) \int_0^\infty du (\theta_e u + 1) \sqrt{u(\theta_e u + 2)} \left( \frac{m}{E} \right)^2 e^{-u} \\ &\times \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_p \sin \theta_p \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_{\gamma'} \sin \theta_{\gamma'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_p \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_{\gamma'} \\ &\times \frac{\omega'}{\omega} \frac{\bar{X}}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \\ &\times \{ n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x} \} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{m}{E} = \frac{m}{K+m} = \frac{1}{\theta_e u + 1} \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{p}{E} = \frac{\sqrt{K(K+2m)}}{K+m} = \frac{\sqrt{\theta_e u (\theta_e u + 2)}}{\theta_e u + 1} \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\omega}{E} = \frac{x k_B T_e}{E} = x \frac{k_B T_e}{m} \frac{m}{E} = \frac{x \theta_e}{\theta_e u + 1} \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\omega}{k_B T_e} \left( \frac{\omega'}{\omega} - 1 \right) \\ &= -x \frac{\frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) + \frac{p}{E} (\cos \theta_p - \cos \theta'_p)}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

$$\bar{X} = - \left( \frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa} \right) + \left\{ 2m^2 \left( \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'} \right) \right\}^2 - 2 \left\{ 2m^2 \left( \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'} \right) \right\} \quad (\text{A.49})$$



という結果が得られる。ここで、

$$\kappa = -2\omega E \left(1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p\right) \quad (\text{A.50})$$

$$\kappa' = 2\omega' E \left(1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p\right) \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\kappa'} &= -\frac{\omega}{\omega'} \frac{1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p}{1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \\ &= -\frac{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p}{1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = -\frac{1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \quad (\text{A.53})$$

であることから、

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa}\right) &= \frac{[1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p]^2 + (1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p)^2}{(1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p) [1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p]} \\ &= \frac{\{[1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p] - (1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p)\}^2}{(1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p) [1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p]} \\ &\quad + \frac{2(1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p) [1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p]}{(1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p) [1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p]} \\ &= \left(\frac{\omega}{E}\right)^2 \frac{(1 - \cos \theta_{\gamma'})^2}{(1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p) [1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p]} + 2 \\ &= x^2 \theta_e^2 \left(\frac{m}{E}\right)^2 \frac{(1 - \cos \theta_{\gamma'})^2}{(1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p) [1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p]} + 2 \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{aligned} 2m^2 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'}\right) &= \frac{m^2}{\omega E} \left(-\frac{1}{1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p} + \frac{\omega}{\omega'} \frac{1}{1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p}\right) \\ &= \left(\frac{\omega}{E}\right)^{-1} \left(\frac{m}{E}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p} \left[-1 + \frac{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p}{1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p}\right] \\ &= \left(\frac{m}{E}\right)^2 \frac{1 - \cos \theta_{\gamma'}}{(1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p) (1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p)} \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

という計算結果を得る。したがって、

$$\begin{aligned} \overline{X} &= 2 + \left(\frac{m}{E}\right)^4 \frac{(1 - \cos \theta_{\gamma'})^2}{(1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p)^2 (1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p)^2} \\ &\quad - 2 \left(\frac{m}{E}\right)^2 \frac{1 - \cos \theta_{\gamma'}}{(1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p) (1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p)} \\ &\quad + x^2 \theta_e^2 \left(\frac{m}{E}\right)^2 \frac{(1 - \cos \theta_{\gamma'})^2}{(1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p) [1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p]} \end{aligned}$$

(A.56)

と計算できる。

(A.43) 式は5重積分になっているが、電子の運動を  $x-z$  平面に固定すれば、熱的SZ効果の場合、4重積分に減らすことができる。次のようにして考えることもできる。まず、(A.43) 式の被積分関数を詳細に見てみると、角度の変数  $\phi_p$  と  $\phi_{\gamma'}$  は、(A.14) 式で表される  $\cos \theta'_p$  の中でのみ存在していることが分かる。すなわち、(A.14) 式から、 $\cos(\phi_p - \phi_{\gamma'})$  という形でのみ用いられていることが分かる。コサイン関数は  $2\pi$  の周期を持つ周期関数であるから、関数  $f(x)$  を  $2\pi$  の周期を持つ周期関数とすると、(A.43) 式の被積分関数の中にある  $\phi_p$  と  $\phi_{\gamma'}$  の関数は、 $f(\phi_p - \phi_{\gamma'})$  と定義することができる。そのとき、??より、

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi_p - \phi_{\gamma'}) d\phi_p d\phi_{\gamma'} = 2\pi \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi \quad (\text{A.57})$$

が成り立つから、(A.43) 式は、4重積分になる。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -\frac{3}{4} \sigma_T N_e g(\theta_e) \int_0^\infty du (\theta_e u + 1) \sqrt{u(\theta_e u + 2)} \left(\frac{m}{E}\right)^2 e^{-u} \\ &\times \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_p \sin \theta_p \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_{\gamma'} \sin \theta_{\gamma'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &\times \frac{\omega'}{\omega} \frac{1}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \\ &\times \{n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x}\} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

$$\cos \theta'_p = \cos \theta_p \cos \theta_{\gamma'} + \sin \theta_p \sin \theta_{\gamma'} \cos \phi \quad (\text{A.59})$$

とすることができる。

さて、電子の温度で規格化した無次元周波数  $x$  には、

$$x = \frac{k_B T_0}{k_B T_e} X = \frac{1}{\theta_e} \frac{k_B T_0}{m c^2} X \quad (\text{A.60})$$

$$X \equiv \frac{\omega}{k_B T_0} \quad (\text{A.61})$$

を代入する。ただし、 $T_0$  は宇宙背景放射の温度であり、 $T_0 \simeq 2.726\text{K}$  である。散乱前後の光子分布関数には、

$$n(\omega) = \frac{1}{e^X - 1} \quad (\text{A.62})$$

$$n(\omega') = \frac{1}{e^{\frac{\omega'}{\omega} X} - 1} \quad (\text{A.63})$$

を代入する。さらに、時間積分をして、

$$\Delta n(X) = \int \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} dt \quad (\text{A.64})$$

$$dt = \frac{dl}{c} = dl \quad (l: \text{銀河団内の光路長}) \quad (\text{A.65})$$

$$\tau \equiv \sigma_T \int dl N_e(l) \quad (\tau: \text{光学的深さ}) \quad (\text{A.66})$$

を得る。最後に、分布強度のずれを表す以下の式：

$$\Delta I = \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n(X)}{n_0(X)} \quad (\text{A.67})$$

$$n_0(X) \equiv \frac{1}{e^X - 1} \quad (\text{: プランク分布関数}) \quad (\text{A.68})$$

を計算することによって、横軸のパラメータを無次元周波数  $X$  として  $\Delta I/\tau$  をプロットすると、SZ 効果のグラフが求められる。

A.58 式の数値積分の際は、ガウス積分法を用いて、分点数を 98 分点として求めた。その数値積分の値は、A.2 で行われる展開計算の値の有効性確認の際に用いられる。

## A.2 展開計算

ここでは、 $\theta_e \ll 1$  として、ボルツマン方程式の展開計算について記述する。??の (A.23) 式より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W \{n(\omega) [1 + n(\omega')] f(E) - n(\omega') [1 + n(\omega)] f(E')\} \\ &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \{n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x}\} \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

である。まず、 $\Delta x \equiv (\omega' - \omega) / k_B T_e \ll 1$  として、次のような流れで、フォッカー・プランク展開をする。まず、

$$\begin{aligned} n(\omega') &= n(\omega + \Delta\omega) \\ &\simeq n + \frac{\partial n}{\partial \omega} \Delta\omega + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 n}{\partial \omega^2} (\Delta\omega)^2 + \dots \\ &= n + \frac{\partial n}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \\ &= n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

$$n \equiv n(\omega) \quad (\text{A.71})$$

$$e^{\Delta x} \simeq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k \quad (\text{A.72})$$

となることを用いて、

$$\begin{aligned} &n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x} \\ &\simeq n \left[ 1 + n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \right] - (1 + n) \left[ n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \right] \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k \right] \\ &= n(1 + n) + n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k - n(1 + n) - (1 + n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -n(1+n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k - (1+n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j n}{\partial x^j} (\Delta x)^j \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} (\Delta x)^l \\
&= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k - (1+n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j n}{\partial x^j} (\Delta x)^j \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} (\Delta x)^l - n(1+n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k \\
&= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} \frac{(\Delta x)^k}{k!} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(j+l)!}{j! l!} (1+n) \frac{\partial^j n}{\partial x^j} \frac{(\Delta x)^{j+l}}{(j+l)!} - \sum_{k=1}^{\infty} n(1+n) \frac{(\Delta x)^k}{k!} \tag{A.73}
\end{aligned}$$

という形式にまとめることができる。ここで、 $\Delta x$  の同次項でまとめるために、 $j+l=k$  とする。 $j$  に  $j=k-l$  を代入すれば、 $k$  と  $l$  についての和で表せる。そのとき、 $j \geq 1$ 、 $l \geq 1$  に注意すると、 $1 \leq l \leq k-1$  の範囲で和をとることになるから、

$$\begin{aligned}
& n(\omega) [1+n(\omega')] - n(\omega') [1+n(\omega)] e^{\Delta x} \\
& \simeq - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{\partial^k n}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-l)! l!} (1+n) \frac{\partial^{k-l} n}{\partial x^{k-l}} + n(1+n) \right] \frac{(\Delta x)^k}{k!} \right\} \tag{A.74}
\end{aligned}$$

という形式へ、さらにまとめることができる。(A.74) 式を (A.69) 式へ代入して、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \{ n(\omega) [1+n(\omega')] - n(\omega') [1+n(\omega)] e^{\Delta x} \} \\
&\simeq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial^k n}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-l)! l!} (1+n) \frac{\partial^{k-l} n}{\partial x^{k-l}} + n(1+n) \right] I_k \\
&= 2 \left[ \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] I_1 \\
&\quad + 2 \left[ \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 2(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] I_2 \\
&\quad + 2 \left[ \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} + 3(1+n) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 3(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] I_3 \\
&\quad + 2 \left[ \frac{\partial^4 n}{\partial x^4} + 4(1+n) \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} + 6(1+n) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 4(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] I_4 \\
&\quad \vdots \tag{A.75}
\end{aligned}$$

という形式で表現できる。このとき、

$$I_k \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \frac{(\Delta x)^k}{k!} \quad (k \geq 1) \tag{A.76}$$

である。A.1 を参考にして、(A.76) 式を計算すると、

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{3}{8} \sigma_T N_e g(\theta_e) \int_0^{\infty} du (\theta_e u + 1) \sqrt{u(\theta_e u + 2)} \left( \frac{m}{E} \right)^2 e^{-u} \\
&\quad \times \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta_p \sin \theta_p \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta_{\gamma'} \sin \theta_{\gamma'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \\
&\quad \times \frac{\omega'}{\omega} \frac{\overline{X}}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \frac{(\Delta x)^k}{k!} \tag{A.77}
\end{aligned}$$

となる。次に、 $\theta_e \ll 1$ として、

$$\sqrt{\theta_e u + 2} \simeq \sqrt{2} \left[ 1 + \frac{1}{4} (\theta_e u) - \frac{1}{32} (\theta_e u)^2 + \frac{1}{128} (\theta_e u)^3 - \frac{5}{2048} (\theta_e u)^4 + \frac{7}{8192} (\theta_e u)^5 + \dots \right] \quad (\text{A.78})$$

$$\begin{aligned} \frac{m}{E} &= \frac{1}{1 + \theta_e u} \\ &\simeq 1 - \theta_e u + (\theta_e u)^2 - (\theta_e u)^3 + (\theta_e u)^4 - (\theta_e u)^5 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{E} &= \frac{\sqrt{\theta_e u (\theta_e u + 2)}}{\theta_e u + 1} \\ &\simeq \sqrt{2\theta_e u} \left[ 1 - \frac{3}{4} \theta_e u + \frac{23}{32} (\theta_e u)^2 - \frac{91}{128} (\theta_e u)^3 + \frac{1451}{2048} (\theta_e u)^4 - \frac{5797}{8192} (\theta_e u)^5 + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{E} &= \frac{x\theta_e}{\theta_e u + 1} \\ &\simeq x\theta_e \left[ 1 - \theta_e u + (\theta_e u)^2 - (\theta_e u)^3 + (\theta_e u)^4 - (\theta_e u)^5 + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

と展開できる。 $g(\theta_e)$ の展開については、A.2.2に記述されている。これらを用いて、たとえば、

$$\frac{1}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p}$$

を展開する場合を考える。まず、

$$\frac{1}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \equiv \frac{1}{1 + a} \simeq 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + \dots \quad (\text{A.82})$$

$$a \equiv \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \quad (\text{A.83})$$

と展開しておいて、(A.80)式と(A.81)式を用いて $a$ をさらに展開する。ただし、仮に、 $O(\theta_e^j)$ までの展開を考えるのであれば、(A.82)式の展開は、 $O(a^{2j})$ まで展開する必要がある。なぜなら、(A.83)式中の(A.80)式の展開式は $O(\theta_e^{1/2})$ を最低次数の項として含んでいる。よって、 $a$ を展開した式は、 $O(\theta_e^{1/2})$ を最低次数の項として持つのである。すなわち、

$$\begin{aligned} a^i &= \left[ O(\theta_e^{1/2}) + O(\theta_e) + O(\theta_e^{3/2}) + \dots \right]^i \\ &= \theta_e^{i/2} \left[ O(\theta_e^0) + O(\theta_e^{1/2}) + O(\theta_e) + \dots \right]^i \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

は、 $\theta_e^{i/2}$ を最低次数の項として持つため、(A.82)式の展開は、 $O(a^{2j})$ まで必要となる。それと同様に、フォッカー・プランク展開の展開、すなわち、 $\Delta x$ による展開の場合にも同様な議論ができる。まず、

$$\Delta x = -x \frac{\frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) + \frac{p}{E} (\cos \theta_p - \cos \theta'_p)}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p}$$

$$\equiv -x \frac{b}{1+a} \quad (\text{A.85})$$

$$b \equiv \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) + \frac{p}{E} (\cos \theta_p - \cos \theta'_p) \quad (\text{A.86})$$

とおくと、 $a$  の展開は、(A.82) 式の展開であるから、 $O(\theta_e^0)$  が最低次数である。一方、 $b$  の方は、

$$\begin{aligned} b^i &= \left[ O\left(\theta_e^{\frac{1}{2}}\right) + O(\theta_e) + O\left(\theta_e^{\frac{3}{2}}\right) + \dots \right]^i \\ &= \theta_e^{\frac{i}{2}} \left[ O(\theta_e^0) + O\left(\theta_e^{\frac{1}{2}}\right) + O(\theta_e) + \dots \right]^i \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

となるから、 $O(\Delta x^{2j})$  までの展開が必要である。

これらを踏まえたうえで、(A.77) 式を  $O(\theta_e^5)$  まで展開計算を行う (A.4 も参照)。

$I_k$  を  $1 \leq k \leq 10$  の範囲 (この範囲までを選ぶ理由については付録 A を参照せよ) で求めると、

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \sigma_T N_e \theta_e x \left\{ 4 - x + \theta_e \left( 10 - \frac{47}{2}x + \frac{21}{5}x^2 \right) \right. \\ &\quad + \theta_e^2 \left( \frac{15}{2} - \frac{1023}{8}x + \frac{567}{5}x^2 - \frac{147}{10}x^3 \right) \\ &\quad + \theta_e^3 \left( -\frac{15}{2} - \frac{2505}{8}x + \frac{9891}{10}x^2 - \frac{9551}{20}x^3 + \frac{1616}{35}x^4 \right) \\ &\quad \left. + \theta_e^4 \left( \frac{135}{32} - \frac{30375}{128}x + \frac{177849}{40}x^2 - \frac{472349}{80}x^3 + \frac{63456}{35}x^4 - \frac{940}{7}x^5 \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \sigma_T N_e \theta_e x^2 \left\{ 1 + \theta_e \left( \frac{47}{2} - \frac{63}{5}x + \frac{7}{10}x^2 \right) \right. \\ &\quad + \theta_e^2 \left( \frac{1023}{8} - \frac{1302}{5}x + \frac{161}{2}x^2 - \frac{22}{5}x^3 \right) \\ &\quad + \theta_e^3 \left( \frac{2505}{8} - \frac{10647}{5}x + \frac{38057}{20}x^2 - \frac{2829}{7}x^3 + \frac{682}{35}x^4 \right) \\ &\quad \left. + \theta_e^4 \left( \frac{30375}{128} - \frac{187173}{20}x + \frac{1701803}{80}x^2 - \frac{44769}{4}x^3 + \frac{61512}{35}x^4 - \frac{510}{7}x^5 \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} \sigma_T N_e \theta_e x^3 \left\{ \theta_e \left( \frac{42}{5} - \frac{7}{5}x \right) \right. \\ &\quad + \theta_e^2 \left( \frac{868}{5} - \frac{658}{5}x + \frac{88}{5}x^2 - \frac{11}{30}x^3 \right) \\ &\quad + \theta_e^3 \left( \frac{7098}{5} - \frac{14253}{5}x + \frac{8084}{7}x^2 - \frac{3503}{28}x^3 + \frac{64}{21}x^4 \right) \\ &\quad \left. + \theta_e^4 \left( \frac{62391}{10} - \frac{614727}{20}x + 28193x^2 - \frac{123083}{16}x^3 + \frac{14404}{21}x^4 - \frac{344}{21}x^5 \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2} \sigma_T N_e \theta_e x^4 \left\{ \frac{7}{10} \theta_e \right. \\ &\quad \left. + \theta_e^2 \left( \frac{329}{5} - 22x + \frac{11}{10}x^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\theta_e^3 \left( \frac{14253}{10} - \frac{9297}{7}x + \frac{7781}{28}x^2 - \frac{320}{21}x^3 + \frac{16}{105}x^4 \right) \\
& +\theta_e^4 \left( \frac{614727}{40} - \frac{124389}{4}x + \frac{239393}{16}x^2 - \frac{7010}{3}x^3 + \frac{12676}{105}x^4 - \frac{11}{7}x^5 \right) \} \quad (\text{A.91})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{1}{2}\sigma_T N_e \theta_e x^5 \left\{ \theta_e^2 \left( \frac{44}{5} - \frac{11}{10}x \right) \right. \\
& +\theta_e^3 \left( \frac{18594}{35} - \frac{36177}{140}x + \frac{192}{7}x^2 - \frac{64}{105}x^3 \right) \\
& \left. +\theta_e^4 \left( \frac{124389}{10} - \frac{1067109}{80}x + 3696x^2 - \frac{5032}{15}x^3 + \frac{66}{7}x^4 - \frac{11}{210}x^5 \right) \right\} \quad (\text{A.92})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= \frac{1}{2}\sigma_T N_e \theta_e x^6 \left\{ \frac{11}{30}\theta_e^2 \right. \\
& +\theta_e^3 \left( \frac{12059}{140} - \frac{64}{3}x + \frac{32}{35}x^2 \right) \\
& \left. +\theta_e^4 \left( \frac{355703}{80} - \frac{8284}{3}x + \frac{6688}{15}x^2 - 22x^3 + \frac{11}{42}x^4 \right) \right\} \quad (\text{A.93})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= \frac{1}{2}\sigma_T N_e \theta_e x^7 \left\{ \theta_e^3 \left( \frac{128}{21} - \frac{64}{105}x \right) \right. \\
& \left. +\theta_e^4 \left( \frac{16568}{21} - \frac{30064}{105}x + \frac{176}{7}x^2 - \frac{11}{21}x^3 \right) \right\} \quad (\text{A.94})
\end{aligned}$$

$$I_8 = \frac{1}{2}\sigma_T N_e \theta_e x^8 \left\{ \frac{16}{105}\theta_e^3 + \theta_e^4 \left( \frac{7516}{105} - \frac{99}{7}x + \frac{11}{21}x^2 \right) \right\} \quad (\text{A.95})$$

$$I_9 = \frac{1}{2}\sigma_T N_e \theta_e x^9 \left\{ \theta_e^4 \left( \frac{22}{7} - \frac{11}{42}x \right) \right\} \quad (\text{A.96})$$

$$I_{10} = \frac{1}{2}\sigma_T N_e \theta_e x^{10} \left\{ \frac{11}{210}\theta_e^4 \right\} \quad (\text{A.97})$$

という結果が得られる。ここで  $\sigma_T$  はトムソン散乱断面積を表す。宇宙背景放射の初期分布  $n(\omega)$  を近似的にプランク分布：

$$n_0 = \frac{1}{e^X - 1} \quad (\text{A.98})$$

であるとする。求まった  $I_k$  と、

$$\begin{aligned}
x &= \frac{T_0}{T_e} \frac{\omega}{k_B T_0} \\
&= \frac{T_0}{T_e} X \quad (\text{A.99})
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{T_e}{T_0} \frac{\partial}{\partial X} \quad (\text{A.100})$$

$$n(\omega) = \frac{1}{e^X - 1} \quad (\text{A.101})$$

$$X \equiv \frac{\omega}{k_B T_e} \quad (\text{A.102})$$

を(??)式に代入する。その後、 $T_e \sim 10^8$  Kと $T_0 \simeq 2.726$  Kの値のオーダーから、 $T_0/T_e \ll 1$ 、すなわち、 $T_0/T_e \rightarrow 0$ とする。さらに、宇宙背景放射が銀河団を通過する時間で積分をして、プランク分布 $n_0$ で規格化することにより、相対的な分布変化として、

$$\frac{\Delta n(X)}{n_0} = \frac{1}{n_0} \int \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} dt \quad (\text{A.103})$$

$$dt = \frac{dl}{c} = dl \quad (l: \text{銀河団内の光路長}) \quad (\text{A.104})$$

$$\tau \equiv \sigma_T \int dl N_e(l) \quad (\tau: \text{光学的深さ}) \quad (\text{A.105})$$

を計算すると、

$$\frac{\Delta n(X)}{n_0} = \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \theta_e (Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4) \quad (\text{A.106})$$

という形式にまとめることができる。 $Y_0 \sim Y_4$ については、

$$Y_0 = -4 + \tilde{X} \quad (\text{A.107})$$

$$Y_1 = -10 + \frac{47}{2} \tilde{X} - \frac{42}{5} \tilde{X}^2 + \frac{7}{10} \tilde{X}^3 + \tilde{S}^2 \left( -\frac{21}{5} + \frac{7}{5} \tilde{X} \right) \quad (\text{A.108})$$

$$\begin{aligned} Y_2 = & -\frac{15}{2} + \frac{1023}{8} \tilde{X} - \frac{868}{5} \tilde{X}^2 + \frac{329}{5} \tilde{X}^3 - \frac{44}{5} \tilde{X}^4 + \frac{11}{30} \tilde{X}^5 \\ & + \tilde{S}^2 \left( -\frac{434}{5} + \frac{658}{5} \tilde{X} - \frac{242}{5} \tilde{X}^2 + \frac{143}{30} \tilde{X}^3 \right) \\ & + \tilde{S}^4 \left( -\frac{44}{5} + \frac{187}{60} \tilde{X} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

$$\begin{aligned} Y_3 = & \frac{15}{2} + \frac{2505}{8} \tilde{X} - \frac{7098}{5} \tilde{X}^2 + \frac{14253}{10} \tilde{X}^3 - \frac{18594}{35} \tilde{X}^4 \\ & + \frac{12059}{140} \tilde{X}^5 - \frac{128}{21} \tilde{X}^6 + \frac{16}{105} \tilde{X}^7 \\ & + \tilde{S}^2 \left( -\frac{3549}{5} + \frac{14253}{5} \tilde{X} - \frac{102267}{35} \tilde{X}^2 + \frac{156767}{140} \tilde{X}^3 - \frac{1216}{7} \tilde{X}^4 + \frac{64}{7} \tilde{X}^5 \right) \\ & + \tilde{S}^4 \left( -\frac{18594}{35} + \frac{205003}{280} \tilde{X} - \frac{1920}{7} \tilde{X}^2 + \frac{1024}{35} \tilde{X}^3 \right) \\ & + \tilde{S}^6 \left( -\frac{544}{21} + \frac{992}{105} \tilde{X} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

$$\begin{aligned} Y_4 = & -\frac{135}{32} + \frac{30375}{128} \tilde{X} - \frac{62391}{10} \tilde{X}^2 + \frac{614727}{40} \tilde{X}^3 - \frac{124389}{10} \tilde{X}^4 \\ & + \frac{355703}{80} \tilde{X}^5 - \frac{16568}{21} \tilde{X}^6 + \frac{7516}{105} \tilde{X}^7 - \frac{22}{7} \tilde{X}^8 + \frac{11}{210} \tilde{X}^9 \\ & + \tilde{S}^2 \left( -\frac{62391}{20} + \frac{614727}{20} \tilde{X} - \frac{1368279}{20} \tilde{X}^2 + \frac{4624139}{80} \tilde{X}^3 - \frac{157396}{7} \tilde{X}^4 \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{30064}{7} \tilde{X}^5 - \frac{2717}{7} \tilde{X}^6 + \frac{2761}{210} \tilde{X}^7 \Big) \\
& + \tilde{S}^4 \left( -\frac{124389}{10} + \frac{6046951}{160} \tilde{X} - \frac{248520}{7} \tilde{X}^2 + \frac{481024}{35} \tilde{X}^3 - \frac{15972}{7} \tilde{X}^4 \right. \\
& \left. + \frac{18689}{140} \tilde{X}^5 \right) \\
& + \tilde{S}^6 \left( -\frac{70414}{21} + \frac{465992}{105} \tilde{X} - \frac{11792}{7} \tilde{X}^2 + \frac{19778}{105} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^8 \left( -\frac{682}{7} + \frac{7601}{210} \tilde{X} \right)
\end{aligned} \tag{A.111}$$

という結果が得られる。ただし、

$$\tilde{X} \equiv X \coth \left( \frac{X}{2} \right) \tag{A.112}$$

$$\tilde{S} \equiv \frac{X}{\sinh(X/2)} \tag{A.113}$$

である。最後に、分布強度のずれを表す以下の式：

$$\Delta I = \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n(X)}{n_0(X)} \tag{A.114}$$

$$n_0(X) \equiv \frac{1}{e^X - 1} \quad ( : \text{プランク分布関数} ) \tag{A.115}$$

を計算する。横軸のパラメータを無次元周波数  $X$  として  $\Delta I/\tau$  をプロットすると、SZ 効果のグラフが求められる。ここまでの議論は、 $O(\theta_e^5)$  までであるが、我々はさらに高次の計算として、 $O(\theta_e^{11})$  までの計算も行っている。その場合、 $Y_0 \sim Y_{10}$  までの計算が必要である。 $Y_5 \sim Y_{10}$  までの計算結果については、??

### A.2.1 化学ポテンシャルを含む項

ここでは、電子分布関数中の化学ポテンシャルを含む項を、電子数密度を用いて表す計算について記述する。電子の縮退を無視し、電子の分布関数に対して相対論的マクスウェル分布を仮定する。電子が温度  $T_e$  を持つとすると、

$$\begin{aligned}
f(E) &= \left\{ e^{[(E-m)-(\mu-m)]/k_B T_e} + 1 \right\}^{-1} \\
&\approx e^{-(E-m)/k_B T_e} e^{(\mu-m)/k_B T_e}
\end{aligned} \tag{A.116}$$

である。電子の非相対論的な運動エネルギーとして、 $K \equiv (E - m)$  と定義する。電子の数密度を  $N_e$  とおくと、

$$\begin{aligned}
N_e &= 2 \int_0^\infty \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(E) \\
&= 2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi_p \int_0^\pi d\theta_p \sin \theta_p \int_0^\infty dp p^2 f(E) \\
&= \frac{1}{\pi^2} e^{(\mu-m)/k_B T_e} \int_0^\infty dp p^2 e^{-K/k_B T_e}
\end{aligned} \tag{A.117}$$

という計算ができる。ここで、全エネルギー  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$  と運動エネルギー  $K = E - m$  から、

$$\begin{aligned} p^2 &= E^2 - m^2 \\ &= (K + m)^2 - m^2 \\ &= K(K + 2m) \end{aligned} \quad (\text{A.118})$$

$$p = \sqrt{K(K + 2m)} \quad (\text{A.119})$$

$$dp p = dK(K + m) \quad (\text{A.120})$$

と表せるから、 $p$  から  $K$  への変数変換を行うと、

$$N_e = \frac{1}{\pi^2} e^{(\mu-m)/k_B T_e} \int_0^\infty dK (K + m) \sqrt{K(K + 2m)} e^{-K/k_B T_e} \quad (\text{A.121})$$

となる。次に、 $u \equiv K/k_B T_e$  と定義して変数変換を行うと、

$$\begin{aligned} N_e &= \frac{1}{\pi^2} e^{(\mu-m)/k_B T_e} \int_0^\infty k_B T_e du (k_B T_e u + m) \sqrt{k_B T_e u (k_B T_e u + 2m)} e^{-u} \\ &= \frac{1}{\pi^2} e^{(\mu-m)/k_B T_e} m^3 \int_0^\infty \frac{k_B T_e}{m} du \left( \frac{k_B T_e}{m} u + 1 \right) \sqrt{\frac{k_B T_e}{m} u \left( \frac{k_B T_e}{m} u + 2 \right)} e^{-u} \end{aligned} \quad (\text{A.122})$$

となる。ここで、

$$\theta_e \equiv \frac{k_B T_e}{mc^2} = \frac{k_B T_e}{m} \quad (\text{A.123})$$

と定義すると、

$$N_e = \frac{1}{\pi^2} e^{(\mu-m)/k_B T_e} m^3 \theta_e \int_0^\infty du (\theta_e u + 1) \sqrt{\theta_e u (\theta_e u + 2)} e^{-u} \quad (\text{A.124})$$

という表現になる。最終的に、化学ポテンシャルを含む項は、

$$e^{(\mu-m)/k_B T_e} = N_e \frac{\pi^2}{m^3} \theta_e^{-\frac{3}{2}} g(\theta_e) \quad (\text{A.125})$$

$$g(\theta_e) \equiv \left[ \int_0^\infty du (\theta_e u + 1) \sqrt{u(\theta_e u + 2)} e^{-u} \right]^{-1} \quad (\text{A.126})$$

と表せる。この結果は、??で記述しているボルツマン方程式の数値積分計算の際に用いる。

## A.2.2 $g(\theta_e)$ の展開計算

ここでは、 $\theta_e \ll 1$  として、ref: で定義した  $g(\theta_e)$  の展開計算について記述する。Mathematica を用いて計算すると、

$$\sqrt{\theta_e u + 2} \simeq \sqrt{2} + \frac{u}{2\sqrt{2}} \theta_e - \frac{u^2}{16\sqrt{2}} \theta_e^2 + \frac{u^3}{64\sqrt{2}} - \frac{5u^4}{1024\sqrt{2}} \theta_e^4 + \frac{7u^5}{4096\sqrt{2}} \theta_e^5 + \dots \quad (\text{A.127})$$

という結果を得る。よって、

$$\begin{aligned}
 g(\theta_e) &= \left[ \int_0^\infty du (\theta_e u + 1) \sqrt{u(\theta_e u + 2)} e^{-u} \right]^{-1} \\
 &\simeq \sqrt{2} \left[ \int_0^\infty \left( u^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4} u^{\frac{3}{2}} \theta_e + \frac{7}{32} u^{\frac{5}{2}} \theta_e^2 - \frac{3}{128} u^{\frac{7}{2}} \theta_e^3 + \frac{11}{2048} u^{\frac{9}{2}} \theta_e^4 - \frac{13}{8192} u^{\frac{11}{2}} \theta_e^5 + \dots \right) e^{-u} du \right]^{-1}
 \end{aligned} \tag{A.128}$$

という計算をすることができる。ここで、??で行われている  $\Gamma$  関数の計算を用いると、

$$\begin{aligned}
 g(\theta_e) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( 1 + \frac{15}{8} \theta_e + \frac{105}{128} \theta_e^2 - \frac{315}{1024} \theta_e^3 + \frac{10395}{32768} \theta_e^4 - \frac{135135}{262144} \theta_e^5 + \dots \right)^{-1} \\
 &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1+a)^{-1} \\
 &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+\dots) \\
 &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( 1 - \frac{15}{8} \theta_e + \frac{345}{128} \theta_e^2 - \frac{3285}{1024} \theta_e^3 + \frac{95355}{32768} \theta_e^4 - \frac{232065}{262144} \theta_e^5 + \dots \right)
 \end{aligned} \tag{A.129}$$

という結果が得られる。この結果は、??で行っているボルツマン方程式の展開計算の際に用いる。

### A.3 (A.57) 式の証明

ここでは、(A.57) 式を証明する。

関数  $f(t)$  は、 $2\pi$  の周期を持つ周期関数、すなわち、

$$f(t) = f(t - 2\pi) = f(t + 2\pi) \tag{A.130}$$

が成り立つとき、

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) dx dy = 2\pi \int_0^{2\pi} f(z) dz \tag{A.131}$$

を示す。

まず、 $y$  についての積分の被積分関数から計算すると、

$$z \equiv x - y \tag{A.132}$$

$$dz = dx \tag{A.133}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(x-y) dx &= \int_{-y}^{2\pi-y} f(z) dz \\
 &= \int_{-y}^0 f(z) dz + \int_0^{2\pi} f(z) dz + \int_{2\pi}^{2\pi-y} f(z) dz
 \end{aligned} \tag{A.134}$$

というように、三つの領域の積分に分けることができる。ここで、第3項は、

$$z' \equiv z - 2\pi \quad (\text{A.135})$$

$$dz' = dz \quad (\text{A.136})$$

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^{2\pi-y} f(z) dz &= \int_0^{-y} f(z' + 2\pi) dz' \\ &= \int_0^{-y} f(z') dz' \\ &= - \int_{-y}^0 f(z') dz' \end{aligned} \quad (\text{A.137})$$

となるから、

$$\int_0^{2\pi} f(x-y) dx = \int_0^{2\pi} f(z) dz \quad (\text{A.138})$$

である。右辺は、明らかに  $y$  に依らない定数と見なせるから、

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) dx dy = 2\pi \int_0^{2\pi} f(z) dz \quad (\text{A.139})$$

と計算することができる。 $x = \phi_p$ ,  $y = \phi_{\gamma'}$ ,  $z = \phi$  とすれば、(A.57) 式になる。

## A.4 三角関数の積分と $\Gamma$ 関数の計算

ここでは、展開計算で必要となる三角関数の積分と  $\Gamma$  関数の計算について記述する。 $m, n$  を 0 以上の整数として、

$$\begin{aligned} I(m) &= \int_0^{2\pi} \cos^m \phi \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^{m-1} \phi (\sin \phi)' \, d\phi \\ &= [\cos^{m-1} \phi \sin \phi]_0^{2\pi} + (m-1) \int_0^{2\pi} \cos^{m-2} \phi \sin^2 \phi \, d\phi \\ &= (m-1) \int_0^{2\pi} \cos^{m-2} \phi (1 - \cos^2 \phi) \, d\phi \\ &= (m-1) I(m-2) - (m-1) I(m) \end{aligned} \quad (\text{A.140})$$

という計算を考える。このとき、 $I(m)$  について整理すると、

$$\begin{aligned} I(m) &= \frac{m-1}{m} I(m-2) \\ &= \frac{m-1}{m} \frac{m-3}{m-2} I(m-4) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{m-1}{m} \frac{m-3}{m-2} \frac{m-5}{m-4} \cdots \frac{3}{4} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi & = 2\pi \frac{(m-1)!!}{m!!} \quad (m: \text{偶数}) \\ \frac{m-1}{m} \frac{m-3}{m-2} \frac{m-5}{m-4} \cdots \frac{4}{5} \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \cos\phi \, d\phi & = 0 \quad (m: \text{奇数}) \end{cases} \quad (\text{A.141})$$

であることが分かる。あるいは、

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \phi \, d\phi = [1 + (-1)^m] \pi \frac{(m-1)!!}{m!!} \quad (\text{A.142})$$

と表現できる。次に、

$$\begin{aligned} J(m) &= \int_0^\pi \sin^m \theta \, d\theta \\ &= - \int_0^\pi \sin^{m-1} \theta (\cos\theta)' \, d\theta \\ &= - [\sin^{m-1} \theta \cos\theta]_0^\pi + (m-1) \int_0^\pi \sin^{m-2} \theta \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= (m-1) \int_0^\pi \sin^{m-2} \theta (1 - \sin^2 \theta) \, d\theta \\ &= (m-1) J(m-2) - (m-1) J(m) \end{aligned} \quad (\text{A.143})$$

という計算を考える。このとき、 $J(m)$  について整理すると、

$$\begin{aligned} J(m) &= \frac{m-1}{m} J(m-2) \\ &= \frac{m-1}{m} \frac{m-3}{m-2} J(m-4) \\ &\vdots \\ &= \begin{cases} \frac{m-1}{m} \frac{m-3}{m-2} \frac{m-5}{m-4} \cdots \frac{3}{4} \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta & = \pi \frac{(m-1)!!}{m!!} \quad (m: \text{偶数}) \\ \frac{m-1}{m} \frac{m-3}{m-2} \frac{m-5}{m-4} \cdots \frac{4}{5} \frac{2}{3} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta & = 2 \frac{(m-1)!!}{m!!} \quad (m: \text{奇数}) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.144})$$

であることが分かる。さらに、

$$\begin{aligned} K(m) &= \int_0^\pi \cos\theta \sin^m \theta \, d\theta \\ &= \int_0^\pi (\sin\theta)' \sin^m \theta \, d\theta \\ &= [\sin^{m+1} \theta]_0^\pi - m \int_0^\pi \cos\theta \sin^m \theta \, d\theta \\ &= -mK(m) \end{aligned} \quad (\text{A.145})$$

という計算を考えると、

$$K(m) = 0 \quad (m: \text{整数}) \quad (\text{A.146})$$

であることが分かる。これら二つのことを踏まえ、

$$\begin{aligned}
 L(m, n) &= \int_0^\pi \cos^m \theta \sin^n \theta \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \cos^{m-1} \theta (\sin \theta)' \sin^n \theta \, d\theta \\
 &= [\cos^{m-1} \theta \sin^{n+1} \theta]_0^\pi - \int_0^\pi \sin \theta [-(m-1) \cos^{m-2} \theta \sin^{n+1} \theta + n \cos^m \theta \sin^{n-1} \theta] \, d\theta \\
 &= (m-1) L(m-2, n+2) - n L(m, n)
 \end{aligned} \tag{A.147}$$

という計算を考える。このとき、 $L(m, n)$  について整理すると、

$$\begin{aligned}
 L(m, n) &= \frac{m-1}{n+1} L(m-2, n+2) \\
 &= \frac{m-1}{n+1} \frac{m-3}{n+3} L(m-4, n+4) \\
 &\vdots \\
 &= \begin{cases} \frac{(m-1)(m-3)\cdots 3 \cdot 1}{(n+1)(n+3)\cdots (n+m-3)(n+m-1)} L(0, n+m) & (m: \text{偶数}) \\ \frac{(m-1)(m-3)\cdots 4 \cdot 2}{(n+1)(n+3)\cdots (n+m-4)(n+m-2)} L(1, n+m-1) & (m: \text{奇数}) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{(m-1)!! (n-1)!!}{(n+m-1)!!} J(n+m) & (m: \text{偶数}) \\ \frac{(m-1)!! (n-1)!!}{(n+m-2)!!} K(n+m-1) & (m: \text{奇数}) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \pi \frac{(m-1)!! (n-1)!!}{(n+m)!!} & (m: \text{偶数}, n: \text{偶数}) \\ 2 \frac{(m-1)!! (n-1)!!}{(n+m)!!} & (m: \text{偶数}, n: \text{奇数}) \\ 0 & (m: \text{奇数}, n: \text{偶数}) \\ 0 & (m: \text{奇数}, n: \text{奇数}) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{A.148}$$

という結果が得られる。あるいは、

$$\int_0^\pi \cos^m \theta \sin^n \theta \, d\theta = \frac{1}{2} [1 + (-1)^m] \left\{ [1 + (-1)^n] \frac{\pi}{2} + [1 - (-1)^n] \right\} \frac{(m-1)!! (n-1)!!}{(n+m)!!} \tag{A.149}$$

という表現ができる。次に、 $\Gamma$  関数の計算について、考えていく。まず、

$$I(m) = \int_0^\infty u^{\frac{m}{2}} e^{-u} \, du$$

$$\begin{aligned}
&= [-u^{\frac{m}{2}}e^{-u}]_0^\infty + \frac{m}{2} \int_0^\infty u^{\frac{m}{2}-1}e^{-u}du \\
&= \frac{m}{2} \int_0^\infty u^{\frac{m-2}{2}}e^{-u}du \\
&= \frac{m}{2} I(m-2) \\
&= \frac{m}{2} \frac{m-2}{2} I(m-4) \\
&\vdots \\
&= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}} m!! I(0) & (m : \text{偶数}) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} m!! I(1) & (m : \text{奇数}) \end{cases} \tag{A.150}
\end{aligned}$$

という計算を考える。さらに、

$$\begin{aligned}
I(0) &= \int_0^\infty e^{-u}du \\
&= [-e^{-u}]_0^\infty \\
&= 1 \tag{A.151}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(1) &= \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}}e^{-u}du \\
&= \int_0^\infty 2s^2e^{-s^2}ds, \quad s^2 \equiv u \\
&= \int_0^\infty s(-e^{-s^2})'ds \\
&= [-se^{-s^2}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-s^2}ds \\
&= \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\varphi \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{A.152}
\end{aligned}$$

であるから、

$$I(m) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}} m!! & (m : \text{偶数}) \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}} m!! & (m : \text{奇数}) \end{cases} \tag{A.153}$$

という結果が得られる。あるいは、

$$\int_0^\infty u^{\frac{m}{2}}e^{-u}du = \left\{ [1 + (-1)^m] + [1 - (-1)^m] \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}} m!! \tag{A.154}$$

という表現もできる。

#### A.4.1 (A.24) 式の証明

ここでは、等式：

$$\frac{d^3 p'}{2E'} = \int_0^\infty dp'_0 \delta(p'_\mu p'^\mu - m^2) d^3 p'$$

を示しておく。両辺にある  $d^3 p'$  は除いておき、プライムを省略して

$$\int_0^\infty dp_0 \delta(p_\mu p^\mu - m^2) = \frac{1}{2E}$$

であることを示すことにする。自然単位系を用いたエネルギーと運動量の関係式は

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dp_0 \delta(p_\mu p^\mu - m^2) &= \int_0^\infty dp_0 \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) \\ &= \int_0^\infty dp_0 \delta(p_0^2 - E^2) \end{aligned} \quad (\text{A.155})$$

と計算できる。ここで、

$$\begin{aligned} p_0^2 &= a \\ 2p_0 dp_0 &= da \end{aligned}$$

とおいて変数変換をする。  $p_0 \geq 0$  であるから、  $p_0 = \sqrt{a}$  である。したがって、

$$dp_0 = \frac{da}{2p_0} = \frac{da}{2\sqrt{a}}$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dp_0 \delta(p_0^2 - E^2) &= \int_0^\infty \frac{da}{2\sqrt{a}} \delta(a - E^2) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \Big|_{a=E^2} \\ &= \frac{1}{2E} \end{aligned} \quad (\text{A.156})$$

という結果が得られ、等式は示された。

### A.5 $Y_5$ $Y_{10}$ までの計算結果

$$Y_5 = -\frac{45}{8} - \frac{7515}{32} \tilde{X} - \frac{28917}{2} \tilde{X}^2 + \frac{795429}{8} \tilde{X}^3 - \frac{2319993}{14} \tilde{X}^4 + \frac{12667283}{112} \tilde{X}^5$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{806524}{21}\tilde{X}^6 + \frac{21310}{3}\tilde{X}^7 - \frac{46679}{63}\tilde{X}^8 + \frac{10853}{252}\tilde{X}^9 - \frac{58}{45}\tilde{X}^{10} + \frac{29}{1890}\tilde{X}^{11} \\
+ \tilde{S}^2 & \left( -\frac{28917}{4} + \frac{795429}{4}\tilde{X} - \frac{25519923}{28}\tilde{X}^2 + \frac{164674679}{112}\tilde{X}^3 - \frac{7661978}{7}\tilde{X}^4 \right. \\
& \left. + 426200\tilde{X}^5 - \frac{11529713}{126}\tilde{X}^6 + \frac{2724103}{252}\tilde{X}^7 - \frac{29377}{45}\tilde{X}^8 + \frac{14761}{945}\tilde{X}^9 \right) \\
+ \tilde{S}^4 & \left( -\frac{2319993}{14} + \frac{215343811}{224}\tilde{X} - \frac{12097860}{7}\tilde{X}^2 + 1363840\tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{11296318}{21}\tilde{X}^4 + \frac{18439247}{168}\tilde{X}^5 - \frac{494392}{45}\tilde{X}^6 + \frac{400171}{945}\tilde{X}^7 \right) \\
+ \tilde{S}^6 & \left( -\frac{3427727}{21} + \frac{1321220}{3}\tilde{X} - \frac{25019944}{63}\tilde{X}^2 + \frac{9756847}{63}\tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{2407609}{90}\tilde{X}^4 + \frac{3149197}{1890}\tilde{X}^5 \right) \\
+ \tilde{S}^8 & \left( -\frac{1447049}{63} + \frac{7499423}{252}\tilde{X} - \frac{513242}{45}\tilde{X}^2 + \frac{4973819}{3780}\tilde{X}^3 \right) \\
+ \tilde{S}^{10} & \left( -\frac{20039}{45} + \frac{158369}{945}\tilde{X} \right)
\end{aligned} \tag{A.157}$$

$$\begin{aligned}
Y_6 = & \frac{7425}{256} + \frac{128655}{1024}\tilde{X} - \frac{360675}{32}\tilde{X}^2 + \frac{50853555}{128}\tilde{X}^3 - \frac{45719721}{32}\tilde{X}^4 + \frac{458203107}{256}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{22251961}{21}\tilde{X}^6 + \frac{71548297}{210}\tilde{X}^7 - \frac{26865067}{420}\tilde{X}^8 + \frac{7313155}{1008}\tilde{X}^9 - \frac{4492}{9}\tilde{X}^{10} \\
& + \frac{6361}{315}\tilde{X}^{11} - \frac{296}{675}\tilde{X}^{12} + \frac{37}{9450}\tilde{X}^{13} \\
+ \tilde{S}^2 & \left( -\frac{360675}{64} + \frac{50853555}{64}\tilde{X} - \frac{502916931}{64}\tilde{X}^2 + \frac{5956640391}{256}\tilde{X}^3 - \frac{422787259}{14}\tilde{X}^4 \right. \\
& \left. + \frac{143096594}{7}\tilde{X}^5 - \frac{6635671549}{840}\tilde{X}^6 + \frac{1835601905}{1008}\tilde{X}^7 - \frac{2275198}{9}\tilde{X}^8 + \frac{6475498}{315}\tilde{X}^9 \right. \\
& \left. - \frac{201428}{225}\tilde{X}^{10} + \frac{50431}{3150}\tilde{X}^{11} \right) \\
+ \tilde{S}^4 & \left( -\frac{45719721}{32} + \frac{7789452819}{512}\tilde{X} - \frac{333779415}{7}\tilde{X}^2 + \frac{2289545504}{35}\tilde{X}^3 - \frac{3250673107}{70}\tilde{X}^4 \right. \\
& \left. + \frac{12425050345}{672}\tilde{X}^5 - \frac{38289808}{9}\tilde{X}^6 + \frac{175550878}{315}\tilde{X}^7 - \frac{344840}{9}\tilde{X}^8 + \frac{1343507}{1260}\tilde{X}^9 \right) \\
+ \tilde{S}^6 & \left( -\frac{378283337}{84} + \frac{2217997207}{105}\tilde{X} - \frac{3599918978}{105}\tilde{X}^2 + \frac{6574526345}{252}\tilde{X}^3 - \frac{93232583}{9}\tilde{X}^4 \right. \\
& \left. + \frac{690760073}{315}\tilde{X}^5 - \frac{31433128}{135}\tilde{X}^6 + \frac{9151432}{945}\tilde{X}^7 \right) \\
+ \tilde{S}^8 & \left( -\frac{832817077}{420} + \frac{5053390105}{1008}\tilde{X} - \frac{39749708}{9}\tilde{X}^2 + \frac{1090981471}{630}\tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{13818464}{45}\tilde{X}^4 + \frac{12565681}{630}\tilde{X}^5 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{S}^{10} \left( -\frac{1551986}{9} + \frac{69474842}{315} \tilde{X} - \frac{19157638}{225} \tilde{X}^2 + \frac{63282617}{6300} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{12} \left( -\frac{1616456}{675} + \frac{34394053}{37800} \tilde{X} \right) \tag{A.158}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_7 = & -\frac{675}{8} + \frac{6345}{32} \tilde{X} + \frac{86751}{8} \tilde{X}^2 + \frac{28579473}{32} \tilde{X}^3 - \frac{463090581}{56} \tilde{X}^4 + \frac{8680356807}{448} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{407333911}{21} \tilde{X}^6 + \frac{304758409}{30} \tilde{X}^7 - \frac{14281971623}{4620} \tilde{X}^8 + \frac{32154229291}{55440} \tilde{X}^9 - \frac{34276642}{495} \tilde{X}^{10} \\
& \frac{36841447}{6930} \tilde{X}^{11} - \frac{1927084}{7425} \tilde{X}^{12} + \frac{229693}{29700} \tilde{X}^{13} - \frac{736}{5775} \tilde{X}^{14} + \frac{46}{51975} \tilde{X}^{15} \\
& + \tilde{S}^2 \left( \frac{86751}{16} + \frac{28579473}{16} \tilde{X} - \frac{5093996391}{112} \tilde{X}^2 + \frac{112844638491}{448} \tilde{X}^3 - \frac{7739344309}{14} \tilde{X}^4 \right. \\
& \left. + 609516818 \tilde{X}^5 - \frac{3527646990881}{9240} \tilde{X}^6 + \frac{8070711552041}{55440} \tilde{X}^7 - \frac{17361119173}{495} \tilde{X}^8 \right. \\
& \left. + \frac{18752296523}{3465} \tilde{X}^9 - \frac{1311380662}{2475} \tilde{X}^{10} + \frac{313071559}{9900} \tilde{X}^{11} - \frac{6023792}{5775} \tilde{X}^{12} + \frac{753296}{51975} \tilde{X}^{13} \right) \\
& + \tilde{S}^4 \left( -\frac{463090581}{56} + \frac{147566065719}{896} \tilde{X} - \frac{6110008665}{7} \tilde{X}^2 + \frac{9752269088}{5} \tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{157101687853}{70} \tilde{X}^4 + \frac{54630035565409}{36960} \tilde{X}^5 - \frac{292174096408}{495} \tilde{X}^6 + \frac{508375127153}{3465} \tilde{X}^7 \right. \\
& \left. - \frac{2245052860}{99} \tilde{X}^8 + \frac{758216593}{360} \tilde{X}^9 - \frac{18723104}{175} \tilde{X}^{10} + \frac{39369376}{17325} \tilde{X}^{11} \right) \\
& + \tilde{S}^6 \left( -\frac{6924676487}{84} + \frac{9447510679}{15} \tilde{X} - \frac{1913784197482}{1155} \tilde{X}^2 + \frac{28906652132609}{13860} \tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{1422840547741}{990} \tilde{X}^4 + \frac{4000723254071}{6930} \tilde{X}^5 - \frac{204642831212}{1485} \tilde{X}^6 + \frac{28405673924}{1485} \tilde{X}^7 \right. \\
& \left. - \frac{1636707416}{1155} \tilde{X}^8 + \frac{447793256}{10395} \tilde{X}^9 \right) \\
& + \tilde{S}^8 \left( -\frac{442741120313}{4620} + \frac{22218572440081}{55440} \tilde{X} - \frac{303314005058}{495} \tilde{X}^2 + \frac{6318713416417}{13860} \tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{8178544496}{45} \tilde{X}^4 + \frac{78006728809}{1980} \tilde{X}^5 - \frac{5023602592}{1155} \tilde{X}^6 + \frac{1979052664}{10395} \tilde{X}^7 \right) \\
& + \tilde{S}^{10} \left( -\frac{11842579811}{495} + \frac{201191142067}{3465} \tilde{X} - \frac{124724248877}{2475} \tilde{X}^2 + \frac{392853355313}{19800} \tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{627352048}{175} \tilde{X}^4 + \frac{4157703008}{17325} \tilde{X}^5 \right) \\
& + \tilde{S}^{12} \left( -\frac{10523805724}{7425} + \frac{213515492317}{118800} \tilde{X} - \frac{4029609568}{5775} \tilde{X}^2 + \frac{4350781384}{51975} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{14} \left( -\frac{85520348}{5775} + \frac{294610772}{51975} \tilde{X} \right) \tag{A.159}
\end{aligned}$$

$$Y_8 = \frac{1905525}{8192} - \frac{31843125}{32768} \tilde{X} - \frac{1274427}{256} \tilde{X}^2 + \frac{723764619}{1024} \tilde{X}^3$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{56131109271}{1792}\tilde{X}^4 + \frac{2131228533597}{14336}\tilde{X}^5 - \frac{28385005515}{112}\tilde{X}^6 + \frac{33759855933}{160}\tilde{X}^7 \\
& -\frac{7332664403233}{73920}\tilde{X}^8 + \frac{8454102129551}{295680}\tilde{X}^9 - \frac{159273899}{30}\tilde{X}^{10} + \frac{3623853049}{5544}\tilde{X}^{11} \\
& -\frac{133798003}{2475}\tilde{X}^{12} + \frac{118712629}{39600}\tilde{X}^{13} - \frac{631168}{5775}\tilde{X}^{14} + \frac{1312}{525}\tilde{X}^{15} - \frac{16}{495}\tilde{X}^{16} + \frac{4}{22275}\tilde{X}^{17} \\
+ \tilde{S}^2 & \left( -\frac{1274427}{512} + \frac{723764619}{512}\tilde{X} - \frac{617442201981}{3584}\tilde{X}^2 + \frac{27705970936761}{14336}\tilde{X}^3 \right. \\
& -\frac{1617945314355}{224}\tilde{X}^4 + \frac{101279567799}{8}\tilde{X}^5 - \frac{1811168107598551}{147840}\tilde{X}^6 \\
& +\frac{2121979634517301}{295680}\tilde{X}^7 - \frac{161344459687}{60}\tilde{X}^8 + \frac{1844541201941}{2772}\tilde{X}^9 - \frac{182099082083}{1650}\tilde{X}^{10} \\
& \left. +\frac{161805313327}{13200}\tilde{X}^{11} - \frac{5165794496}{5775}\tilde{X}^{12} + \frac{21485312}{525}\tilde{X}^{13} - \frac{524152}{495}\tilde{X}^{14} + \frac{23828}{2025}\tilde{X}^{15} \right) \\
+ \tilde{S}^4 & \left( -\frac{56131109271}{1792} + \frac{36230885071149}{28672}\tilde{X} - \frac{1277325248175}{112}\tilde{X}^2 + \frac{202559135598}{5}\tilde{X}^3 \right. \\
& -\frac{80659308435563}{1120}\tilde{X}^4 + \frac{14363519518107149}{197120}\tilde{X}^5 - \frac{678825357538}{15}\tilde{X}^6 \\
& +\frac{50005548223151}{2772}\tilde{X}^7 - \frac{155874673495}{33}\tilde{X}^8 + \frac{391870388329}{480}\tilde{X}^9 \\
& \left. -\frac{16056282752}{175}\tilde{X}^{10} + \frac{1122883072}{175}\tilde{X}^{11} - \frac{124946368}{495}\tilde{X}^{12} + \frac{94627042}{22275}\tilde{X}^{13} \right) \\
+ \tilde{S}^6 & \left( -\frac{482545093755}{448} + \frac{1046555533923}{80}\tilde{X} - \frac{491288515016611}{9240}\tilde{X}^2 + \frac{7600237814466349}{73920}\tilde{X}^3 \right. \\
& -\frac{13223078368879}{120}\tilde{X}^4 + \frac{393525074150057}{5544}\tilde{X}^5 - \frac{14208411332579}{495}\tilde{X}^6 + \frac{3670238350793}{495}\tilde{X}^7 \\
& \left. -\frac{1403583351008}{1155}\tilde{X}^8 + \frac{12771842432}{105}\tilde{X}^9 - \frac{3341029504}{495}\tilde{X}^{10} + \frac{320768096}{2025}\tilde{X}^{11} \right) \\
+ \tilde{S}^8 & \left( -\frac{227312596500223}{73920} + \frac{5841784571519741}{295680}\tilde{X} - \frac{1409414732251}{30}\tilde{X}^2 \right. \\
& +\frac{621530660287039}{11088}\tilde{X}^3 - \frac{567838724732}{15}\tilde{X}^4 + \frac{40316352072577}{2640}\tilde{X}^5 \\
& \left. -\frac{4308066848896}{1155}\tilde{X}^6 + \frac{56446023808}{105}\tilde{X}^7 - \frac{4142724512}{99}\tilde{X}^8 + \frac{6013663016}{4455}\tilde{X}^9 \right) \\
+ \tilde{S}^{10} & \left( -\frac{110058264209}{60} + \frac{19789861500589}{2772}\tilde{X} - \frac{34638563602661}{3300}\tilde{X}^2 + \frac{203039076596489}{26400}\tilde{X}^3 \right. \\
& \left. -\frac{537995295424}{175}\tilde{X}^4 + \frac{118584920576}{175}\tilde{X}^5 - \frac{38077243744}{495}\tilde{X}^6 + \frac{7075408016}{2025}\tilde{X}^7 \right) \\
+ \tilde{S}^{12} & \left( -\frac{730670894383}{2475} + \frac{110351579826901}{158400}\tilde{X} - \frac{3455653005184}{5775}\tilde{X}^2 \right. \\
& \left. +\frac{124091851648}{525}\tilde{X}^3 - \frac{1949035328}{45}\tilde{X}^4 + \frac{66076862872}{22275}\tilde{X}^5 \right) \\
+ \tilde{S}^{14} & \left( -\frac{73339275824}{5775} + \frac{8402811584}{525}\tilde{X} - \frac{3089759392}{495}\tilde{X}^2 + \frac{16899213088}{22275}\tilde{X}^3 \right)
\end{aligned}$$

$$+ \tilde{S}^{16} \left( -\frac{51236656}{495} + \frac{887722324}{22275} \tilde{X} \right) \quad (\text{A.160})$$

$$\begin{aligned}
Y_9 = & -\frac{91125}{128} + \frac{1451925}{512} \tilde{X} - \frac{95823}{8} \tilde{X}^2 - \frac{21387969}{32} \tilde{X}^3 - \frac{3867907059}{56} \tilde{X}^4 \\
& + \frac{361018793313}{448} \tilde{X}^5 - \frac{68346357865}{28} \tilde{X}^6 + \frac{129419653687}{40} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{14191595238489}{6160} \tilde{X}^8 + \frac{72688716977749}{73920} \tilde{X}^9 - \frac{1153370108027}{4290} \tilde{X}^{10} \\
& + \frac{393223901251}{8008} \tilde{X}^{11} - \frac{197855054569}{32175} \tilde{X}^{12} + \frac{275619041167}{514800} \tilde{X}^{13} - \frac{813344128}{25025} \tilde{X}^{14} \\
& + \left. \frac{102350176}{75075} \tilde{X}^{15} - \frac{248008}{6435} \tilde{X}^{16} + \frac{22448}{32175} \tilde{X}^{17} - \frac{268}{36855} \tilde{X}^{18} + \frac{67}{2027025} \tilde{X}^{19} \right) \\
& + \tilde{S}^2 \left( -\frac{95823}{16} - \frac{21387969}{16} \tilde{X} - \frac{42546977649}{112} \tilde{X}^2 + \frac{4693244313069}{448} \tilde{X}^3 - \frac{3895742398305}{56} \tilde{X}^4 \right. \\
& + \frac{388258961061}{2} \tilde{X}^5 - \frac{3505324023906783}{12320} \tilde{X}^6 + \frac{18244867961414999}{73920} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{1168363919431351}{8580} \tilde{X}^8 + \frac{200150965736759}{4004} \tilde{X}^9 - \frac{269280729268409}{21450} \tilde{X}^{10} \\
& + \frac{375668753110621}{171600} \tilde{X}^{11} - \frac{6656815015616}{25025} \tilde{X}^{12} + \frac{1676086482176}{75075} \tilde{X}^{13} \\
& \left. - \frac{8124618076}{6435} \tilde{X}^{14} + \frac{133722736}{2925} \tilde{X}^{15} - \frac{780550}{819} \tilde{X}^{16} + \frac{1951442}{225225} \tilde{X}^{17} \right) \\
& + \tilde{S}^4 \left( -\frac{3867907059}{56} + \frac{6137319486321}{896} \tilde{X} - \frac{3075586103925}{28} \tilde{X}^2 + \frac{3106071688488}{5} \tilde{X}^3 \right. \\
& - \frac{468322642870137}{280} \tilde{X}^4 + \frac{123498130145195551}{49280} \tilde{X}^5 - \frac{4915663400411074}{2145} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{5426096613362549}{4004} \tilde{X}^7 - \frac{230501138572885}{429} \tilde{X}^8 + \frac{909818454892267}{6240} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{62071983816576}{2275} \tilde{X}^{10} + \frac{87597012230656}{25025} \tilde{X}^{11} - \frac{1936731177184}{6435} \tilde{X}^{12} \\
& \left. + \frac{531046959704}{32175} \tilde{X}^{13} - \frac{6383914904}{12285} \tilde{X}^{14} + \frac{48599522}{6825} \tilde{X}^{15} \right) \\
& + \tilde{S}^6 \left( -\frac{1161888083705}{112} + \frac{4012009264297}{20} \tilde{X} - \frac{950836880978763}{770} \tilde{X}^2 + \frac{65347156562996351}{18480} \tilde{X}^3 \right. \\
& - \frac{95753939738509567}{17160} \tilde{X}^4 + \frac{42701363108549843}{8008} \tilde{X}^5 - \frac{21010821809845817}{6435} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{8521313895760139}{6435} \tilde{X}^7 - \frac{1808704301708768}{5005} \tilde{X}^8 + \frac{996341707895936}{15015} \tilde{X}^9 \\
& \left. - \frac{51787627826752}{6435} \tilde{X}^{10} + \frac{1800150554752}{2925} \tilde{X}^{11} - \frac{15664038473}{585} \tilde{X}^{12} + \frac{9717618829}{19305} \tilde{X}^{13} \right) \\
& + \tilde{S}^8 \left( -\frac{439939452393159}{6160} + \frac{50227903431624559}{73920} \tilde{X} - \frac{10206172085930923}{4290} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{67442224527460261}{16016} \tilde{X}^3 - \frac{839696851590836}{195} \tilde{X}^4 + \frac{93603809427848371}{34320} \tilde{X}^5 \\
& \left. - \frac{5551518572838016}{5005} \tilde{X}^6 + \frac{4403399749427584}{15015} \tilde{X}^7 - \frac{64214301298256}{1287} \tilde{X}^8 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{33748676845792}{6435} \tilde{X}^9 - \frac{180525698872}{585} \tilde{X}^{10} + \frac{498306362599}{64350} \tilde{X}^{11} \right) \\
+ \tilde{S}^{10} & \left( -\frac{796978744646657}{8580} + \frac{2147395724731711}{4004} \tilde{X} - \frac{51222101512204703}{42900} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{471402546488607947}{343200} \tilde{X}^3 - \frac{2079836023490112}{2275} \tilde{X}^4 + \frac{9250905100533248}{25025} \tilde{X}^5 \\
& \left. - \frac{590216316653872}{6435} \tilde{X}^6 + \frac{39707189785792}{2925} \tilde{X}^7 - \frac{1921573868732}{1755} \tilde{X}^8 + \frac{395481352652}{10725} \tilde{X}^9 \right) \\
+ \tilde{S}^{12} & \left( -\frac{1080486453001309}{32175} + \frac{256206916478567023}{2059200} \tilde{X} - \frac{4453069674273664}{25025} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{9680505225867904}{75075} \tilde{X}^3 - \frac{30211022101664}{585} \tilde{X}^4 + \frac{370823354437664}{32175} \tilde{X}^5 \\
& \left. - \frac{468962511088}{351} \tilde{X}^6 + \frac{6024995840752}{96525} \tilde{X}^7 \right) \\
+ \tilde{S}^{14} & \left( -\frac{94507435965104}{25025} + \frac{655510094906432}{75075} \tilde{X} - \frac{47892815455696}{6435} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{94838383849856}{32175} \tilde{X}^3 - \frac{745401953564}{1365} \tilde{X}^4 + \frac{8575833693404}{225225} \tilde{X}^5 \left. \right) \\
+ \tilde{S}^{16} & \left( -\frac{794193786328}{6435} + \frac{4981897682288}{32175} \tilde{X} - \frac{57273525044}{945} \tilde{X}^2 + \frac{7451199109}{1001} \tilde{X}^3 \right) \\
+ \tilde{S}^{18} & \left( -\frac{29738697854}{36855} + \frac{632763613814}{2027025} \tilde{X} \right) \tag{A.161}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{10} = & \frac{169255575}{65536} - \frac{2090024775}{262144} \tilde{X} + \frac{433967625}{8192} \tilde{X}^2 + \frac{8992650375}{32768} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{3162934444995}{57344} \tilde{X}^4 + \frac{1353148643034945}{458752} \tilde{X}^5 - \frac{15614127041155}{896} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{9649428040913}{256} \tilde{X}^7 - \frac{1600697595147911}{39424} \tilde{X}^8 + \frac{11942478518370683}{473088} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{135515512037513}{13728} \tilde{X}^{10} + \frac{985744536107759}{384384} \tilde{X}^{11} - \frac{330716455601941}{720720} \tilde{X}^{12} \\
& + \frac{667649235923203}{11531520} \tilde{X}^{13} - \frac{3734552464}{715} \tilde{X}^{14} + \frac{1173672524}{3465} \tilde{X}^{15} - \frac{101283718}{6435} \tilde{X}^{16} \\
& + \frac{46573313}{90090} \tilde{X}^{17} - \frac{231496}{19845} \tilde{X}^{18} + \frac{486254}{2837835} \tilde{X}^{19} - \frac{632}{429975} \tilde{X}^{20} + \frac{79}{14189175} \tilde{X}^{21} \\
+ \tilde{S}^2 & \left( \frac{433967625}{16384} + \frac{8992650375}{16384} \tilde{X} - \frac{34792278894945}{114688} \tilde{X}^2 + \frac{17590932359454285}{458752} \tilde{X}^3 \right. \\
& - \frac{890005241345835}{1792} \tilde{X}^4 + \frac{144741420613695}{64} \tilde{X}^5 - \frac{395372306001534017}{78848} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{2997562108111041433}{473088} \tilde{X}^7 - \frac{137277213694000669}{27456} \tilde{X}^8 + \frac{501743968878849331}{192192} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{450105096074241701}{480480} \tilde{X}^{10} + \frac{910005908563325689}{3843840} \tilde{X}^{11} - \frac{30565444641608}{715} \tilde{X}^{12} \\
& \left. + \frac{19220061253024}{3465} \tilde{X}^{13} - \frac{3318003959821}{6435} \tilde{X}^{14} + \frac{39633889363}{1170} \tilde{X}^{15} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{674232100}{441}\tilde{X}^{16} + \frac{14162634004}{315315}\tilde{X}^{17} - \frac{66268676}{85995}\tilde{X}^{18} + \frac{2366761}{405405}\tilde{X}^{19} \\
+ \tilde{S}^4 & \left( -\frac{3162934444995}{57344} + \frac{23003526931594065}{917504}\tilde{X} - \frac{702635716851975}{896}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{28948284122739}{4}\tilde{X}^3 - \frac{52823020639881063}{1792}\tilde{X}^4 + \frac{20290271002711790417}{315392}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{288783556151940203}{3432}\tilde{X}^6 + \frac{13602288853750966441}{192192}\tilde{X}^7 - \frac{1926423353881306325}{48048}\tilde{X}^8 \\
& + \frac{2203910127782493103}{139776}\tilde{X}^9 - \frac{285009840395088}{65}\tilde{X}^{10} + \frac{1004494671700544}{1155}\tilde{X}^{11} \\
& - \frac{790939543852264}{6435}\tilde{X}^{12} + \frac{2203547422665073}{180180}\tilde{X}^{13} - \frac{5514368524688}{6615}\tilde{X}^{14} \\
& \left. + \frac{352712118964}{9555}\tilde{X}^{15} - \frac{100090472}{105}\tilde{X}^{16} + \frac{6847741883}{630630}\tilde{X}^{17} \right) \\
+ \tilde{S}^6 & \left( -\frac{265440159699635}{3584} + \frac{299132269268303}{128}\tilde{X} - \frac{107246738874910037}{4928}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{10736288188015244017}{118272}\tilde{X}^3 - \frac{11250633324866366773}{54912}\tilde{X}^4 + \frac{107044956409549873087}{384384}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{35119772569736920613}{144144}\tilde{X}^6 + \frac{20641711427037667151}{144144}\tilde{X}^7 - \frac{8304850153899284}{143}\tilde{X}^8 \\
& + \frac{11425274804341264}{693}\tilde{X}^9 - \frac{21149493132050992}{6435}\tilde{X}^{10} + \frac{1867404116927756}{4095}\tilde{X}^{11} \\
& - \frac{13530456158006}{315}\tilde{X}^{12} + \frac{70525836210098}{27027}\tilde{X}^{13} - \frac{2634688733384}{28665}\tilde{X}^{14} + \frac{1344669065548}{945945}\tilde{X}^{15} \left. \right) \\
+ \tilde{S}^8 & \left( -\frac{49621625449585241}{39424} + \frac{8252252656194141953}{473088}\tilde{X} - \frac{1199176766019952537}{13728}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{169066031132377853849}{768768}\tilde{X}^3 - \frac{350890159393659401}{1092}\tilde{X}^4 + \frac{226742359959586740439}{768768}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{25490363366997808}{143}\tilde{X}^6 + \frac{50494776854039216}{693}\tilde{X}^7 - \frac{26224408826568476}{1287}\tilde{X}^8 \\
& + \frac{35009526240086501}{9009}\tilde{X}^9 - \frac{155936482037584}{315}\tilde{X}^{10} + \frac{1808234791337419}{45045}\tilde{X}^{11} \\
& - \frac{1092354818536}{585}\tilde{X}^{12} + \frac{5108388422768}{135135}\tilde{X}^{13} \left. \right) \\
+ \tilde{S}^{10} & \left( -\frac{93641218817921483}{27456} + \frac{5383150911684471899}{192192}\tilde{X} - \frac{85618191041419699667}{960960}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{1141907861818126942223}{7687680}\tilde{X}^3 - \frac{9549779089621656}{65}\tilde{X}^4 + \frac{106082212683516352}{1155}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{241037801099035012}{6435}\tilde{X}^6 + \frac{41190649016484626}{4095}\tilde{X}^7 - \frac{237119757098072}{135}\tilde{X}^8 \\
& \left. + \frac{2870214770932024}{15015}\tilde{X}^9 - \frac{11439343978606}{975}\tilde{X}^{10} + \frac{19889903014249}{64350}\tilde{X}^{11} \right) \\
+ \tilde{S}^{12} & \left( -\frac{1806042564042199801}{720720} + \frac{620626032587895889507}{46126080}\tilde{X} - \frac{20446723289582032}{715}\tilde{X}^2 \right. \\
& \left. + \frac{111008534094162896}{3465}\tilde{X}^3 - \frac{12337846533324344}{585}\tilde{X}^4 + \frac{384677302074466867}{45045}\tilde{X}^5 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{405085617413536}{189}\tilde{X}^6 + \frac{6246648886032032}{19305}\tilde{X}^7 - \frac{109783051647664}{4095}\tilde{X}^8 \\
& + \frac{72050541791741}{77220}\tilde{X}^9) \\
+ \tilde{S}^{14} & \left( -\frac{433940524926002}{715} + \frac{7516881921104968}{3465}\tilde{X} - \frac{19558894934198716}{6435}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{98381542575140068}{45045}\tilde{X}^3 - \frac{643871532247208}{735}\tilde{X}^4 + \frac{62239305026156248}{315315}\tilde{X}^5 \\
& \left. - \frac{666773973312704}{28665}\tilde{X}^6 + \frac{1051014654079528}{945945}\tilde{X}^7 \right) \\
+ \tilde{S}^{16} & \left( -\frac{324339938597938}{6435} + \frac{10336042413184853}{90090}\tilde{X} - \frac{643140654464984}{6615}\tilde{X}^2 \right. \\
& \left. + \frac{270386221757290}{7007}\tilde{X}^3 - \frac{68913020463512}{9555}\tilde{X}^4 + \frac{22981984955077}{45045}\tilde{X}^5 \right) \\
+ \tilde{S}^{18} & \left( -\frac{25688020889588}{19845} + \frac{4592296093604668}{2837835}\tilde{X} - \frac{7805173973924}{12285}\tilde{X}^2 + \frac{223349568314737}{2837835}\tilde{X}^3 \right) \\
+ \tilde{S}^{20} & \left( -\frac{2984377641272}{429975} + \frac{76502310785333}{28378350}\tilde{X} \right) \tag{A.162}
\end{aligned}$$

# 付録B 2回散乱を考慮した熱的スニャエフ・ゼ ルビッチ効果の詳細な計算

## B.1 ボルツマン方程式の計算と数値積分について

計算する上での設定

1. 銀河団内の電子ガスは非常に希薄 ( $\sim 10^{-3} \text{cm}^{-3}$ ) である。
2. 銀河団内の電子ガスは等温・均一に分布していると仮定する。
3. 銀河団内の電子の縮退は無視している。
4. 「'」は、散乱後の終状態であることを表す。
5. 自然単位系 ( $c = 1, \hbar = 1$ ) を用いている。

ここでは、ボルツマン方程式の数値積分計算について記述する。二回散乱をする前の光子分布  $n(\omega)$  は一回散乱後の光子分布  $n_1(\omega)$  であるから、

$$\begin{aligned}
 n(\omega) &\equiv n_1(\omega) \\
 &= n_0(\omega) + \Delta n(\omega) \\
 &= n_0(X) + \Delta n(X)
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

と表現できる。これを、熱的 SZ 効果を計算するボルツマン方程式

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \{n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x}\} \tag{B.2}$$

に代入する。すると、

$$\begin{aligned}
 &n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x} \\
 &= [1 + n_0(\omega') + \Delta n(\omega')] [n_0(\omega) + \Delta n(\omega)] \\
 &\quad - [1 + n_0(\omega) + \Delta n(\omega)] [n_0(\omega') + \Delta n(\omega')] e^{\Delta x} \\
 &= [1 + n_0(\omega')] n_0(\omega) + \Delta n(\omega') n_0(\omega) \\
 &\quad + [1 + n_0(\omega')] \Delta n(\omega) + \Delta n(\omega') \Delta n(\omega) \\
 &\quad - [1 + n_0(\omega)] n_0(\omega') e^{\Delta x} - \Delta n(\omega) n_0(\omega') e^{\Delta x} \\
 &\quad - [1 + n_0(\omega)] \Delta n(\omega') e^{\Delta x} - \Delta n(\omega) \Delta n(\omega') e^{\Delta x} \\
 &= [1 + n_0(\omega')] n_0(\omega) - [1 + n_0(\omega)] n_0(\omega') e^{\Delta x}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +\Delta n(\omega') \{n_0(\omega) - [1 + n_0(\omega)] e^{\Delta x}\} \\
& +\Delta n(\omega) \{[1 + n_0(\omega')] - n_0(\omega') e^{\Delta x}\} \\
& +\Delta n(\omega') \Delta n(\omega) (1 - e^{\Delta x}) \\
= & [1 + n_0(\omega')] n_0(\omega) - [1 + n_0(\omega)] n_0(\omega') e^{\Delta x} \\
& +\Delta n(\omega') [n_0(\omega) (1 - e^{\Delta x}) - e^{\Delta x}] \\
& +\Delta n(\omega) [1 + n_0(\omega') (1 - e^{\Delta x})] \\
& +\Delta n(\omega') \Delta n(\omega) (1 - e^{\Delta x})
\end{aligned} \tag{B.3}$$

というようにまとめられる。ここで、 $\Delta n(\omega') \Delta n(\omega) (1 - e^{\Delta x})$  の項は、ボルツマン方程式を時間積分したときに  $\tau^3$  の項になるため、切り落とす。最終的に、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = & -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \{[1 + n_0(\omega')] n_0(\omega) - [1 + n_0(\omega)] n_0(\omega') e^{\Delta x}\} \\
& -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \{ \Delta n(\omega') [n_0(\omega) (1 - e^{\Delta x}) - e^{\Delta x}] \\
& \quad + \Delta n(\omega) [1 + n_0(\omega') (1 - e^{\Delta x})] \}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

という結果を得る。この式は大きく分けて二つの項の和になっている。そこで、

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \equiv \left[ \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \right]_1 + \left[ \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \right]_2 \tag{B.5}$$

と表現すれば、第一項目が一回散乱成分、第二項目が二回散乱成分である。ここで、

$$\left[ \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \right]_1 \equiv -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \{[1 + n_0(\omega')] n_0(\omega) - [1 + n_0(\omega)] n_0(\omega') e^{\Delta x}\} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \right]_2 \equiv & -2\tau_1 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \left\{ \left[ \frac{\partial n(\omega')}{\partial t} \right]_1 [n_0(\omega) (1 - e^{\Delta x}) - e^{\Delta x}] \right. \\
& \left. + \left[ \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \right]_1 [1 + n_0(\omega') (1 - e^{\Delta x})] \right\}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\tau_1 \equiv \sigma_T \int_0^{l_1} N_e(l_2) dl_2 \tag{B.8}$$

と表せる。

さて、電子の温度で規格化した無次元周波数  $x$  には、

$$x = \frac{k_B T_0}{k_B T_e} X = \frac{1}{\theta_e} \frac{k_B T_0}{mc^2} X \tag{B.9}$$

$$X \equiv \frac{\omega}{k_B T_0} \tag{B.10}$$

を代入する。ただし、 $T_0$  は宇宙背景放射の温度であり、 $T_0 \simeq 2.726\text{K}$  である。散乱前後の光子分布関数には、

$$n_0(\omega) = \frac{1}{e^X - 1} \tag{B.11}$$

$$n_0(\omega') = \frac{1}{e^{\frac{\omega'}{\omega} X} - 1} \tag{B.12}$$

を代入する。さらに、時間積分をして、

$$\Delta n(X) = \int \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} dt = \Delta n_1(X) + \Delta n_2(X) \quad (\text{B.13})$$

という形式にまとめられる。このとき、

$$\Delta n_1(X) \equiv \tau \left[ \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \right]_1 \quad (\text{B.14})$$

$$\Delta n_2(X) \equiv -2\tau_2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \left\{ \left[ \frac{\partial n(\omega')}{\partial t} \right]_1 [n_0(\omega) (1 - e^{\Delta x}) - e^{\Delta x}] \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \right]_1 [1 + n_0(\omega') (1 - e^{\Delta x})] \right\} \quad (\text{B.15})$$

$$\tau \equiv \sigma_T \int_0^l N_e(l_1) dl_1 \quad (\text{B.16})$$

$$\tau_2 \equiv \sigma_T \int_0^l N_e(l_1) dl_1 \sigma_T \int_0^{l_1} N_e(l_2) dl_2 \quad (\text{B.17})$$

である。ここで、 $\tau_2$  を次のように計算して  $\tau$  で表すことができる。まず、

$$f(l) \equiv \sigma_T \int_0^l N_e(l_1) dl_1 = \tau \quad (\text{B.18})$$

と定義すると、

$$f(0) = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$f'(l) = \sigma_T N_e(l) \quad (\text{B.20})$$

であることに注意して、(B.17) 式に

$$\sigma_T N_e(l_1) = f'(l_1) \quad (\text{B.21})$$

$$\sigma_T \int_0^{l_1} N_e(l_2) dl_2 = f(l_1) \quad (\text{B.22})$$

を代入して、

$$\tau_2 \equiv \sigma_T \int_0^l N_e(l_1) dl_1 \sigma_T \int_0^{l_1} N_e(l_2) dl_2 \\ = \int_0^l f'(l_1) f(l_1) dl_1 \\ = \left[ f(l_1) f(l_1) \right]_0^l - \int_0^l f(l_1) f'(l_1) dl_1 \\ = \tau^2 - \tau_2 \quad (\text{B.23})$$

であることが分かる。したがって、

$$\tau_2 = \frac{1}{2} \tau^2 \quad (\text{B.24})$$

である。最後に、分布強度のずれを表す以下の式：

$$\Delta I = \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n(X)}{n_0(X)} = \Delta I_1 + \Delta I_2 \quad (\text{B.25})$$

$$n_0(X) \equiv \frac{1}{e^X - 1} \quad (\text{: プランク分布関数}) \quad (\text{B.26})$$

を計算することによって、横軸のパラメータを無次元周波数  $X$  として  $\frac{\Delta I_1}{\tau}$  をプロットすると、SZ 効果の一回散乱成分のグラフが求められ、 $\frac{\Delta I_2}{\tau^2}$  をプロットすると、SZ 効果の二回散乱成分のグラフが求められる。数値積分の際は、ガウス積分法を用いて、分点数を 98 分点として求めるが、(B.15) 式中にはある  $\left[ \frac{\partial n(\omega')}{\partial t} \right]_1$  の部分は、 $\omega'$  の関数であるが、その  $\omega'$  は、外側にかかる 4 重積分の変数 ( $u, \theta_p, \theta_{\gamma'}, \phi$ ) に依存している。すなわち、 $\omega'$  は

$$\omega' = \frac{\omega \left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p \right)}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{p}{E} = \frac{\sqrt{\theta_e u (\theta_e u + 2)}}{\theta_e u + 1} \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{\omega}{E} = \frac{x \theta_e}{\theta_e u + 1} \quad (\text{B.29})$$

$$\cos \theta'_p = \cos \theta_p \cos \theta_{\gamma'} + \sin \theta_p \sin \theta_{\gamma'} \cos \phi \quad (\text{B.30})$$

の関数である。4 つの変数それぞれが積分範囲内の 1 点の値をとったときに、 $\left[ \frac{\partial n(\omega')}{\partial t} \right]_1$  の引数である  $\omega'$  は値が定まることになる。 $\omega'$  は値が定まると、 $\left[ \frac{\partial n(\omega')}{\partial t} \right]_1$  の計算をすることができる。すなわち、4 つの変数がとりうる値の組み合わせの数だけ、 $\left[ \frac{\partial n(\omega')}{\partial t} \right]_1$  の計算をすることになる。4 つの変数がとりうる値の組み合わせの数は、ガウス積分の分点数に依存している。たとえば、4 重積分を  $n$  分点のガウス積分で計算すると、4 つの変数がとりうる値の組み合わせの数は  $n^4$  個であるから、 $\left[ \frac{\partial n(\omega')}{\partial t} \right]_1$  の計算を  $n^4$  回行わなくてはならない。 $\left[ \frac{\partial n(\omega')}{\partial t} \right]_1$  の計算自体が 4 重積分の計算であるから、4 重積分を  $n^4$  回行うことになる。 $\left[ \frac{\partial n(\omega')}{\partial t} \right]_1$  の 4 重積分も同じ  $n$  分点で計算すると、( $n^4 \times n^4 = n^8$ ) 回の加算を行うことに等しい。これは、8 重積分を  $n$  分点のガウス積分で計算することに等しい。現在の計算機では、所要時間の面から、この計算は不可能と考えられる。そこで、 $\left[ \frac{\partial n(\omega')}{\partial t} \right]_1$  の部分だけフィッティング式を用いて、4 重積分を計算した。フィッティング式は、共同研究者である須田康彦が考案したものをを用いた。ただし、この部分の計算では、 $X$  の非常に大きな所まで取らなくてはならない。電子温度が高い ( $\theta_e = 0.3$ ) 場合、 $X \simeq 40$  でゆがみの大きさは  $10^{-5}$  (もっとも歪みの大きな所に対して  $10^{-4}$  程度) 以下である。この周波数でのフィッティング式の精度は大きくて 20% 程度である。これ以降の周波数では歪みの大きさは、指数関数的に小さくなっていく ( $X$  が 10 増えるのに対して一桁)。結果としてこの展開式を代入する事での数値計算に対する影響は、温度が高い場合に対しても、ほとんど無いと言える。

なお、これまでの流れと同様に、数値積分の値は、この次に行う展開計算の値の精度確認の際に用いられる。

## B.2 展開計算

ここでは、 $\theta_e \ll 1$  として、二回散乱成分の展開計算について記述する。p.199 の (B.7) 式より、

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \right]_2 &= -2\tau_1 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \\ &\quad \times \left\{ \left[ \frac{\partial n(\omega')}{\partial t} \right]_1 [n_0(\omega) (1 - e^{\Delta x}) - e^{\Delta x}] + \left[ \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \right]_1 [1 + n_0(\omega') (1 - e^{\Delta x})] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

まず、 $\Delta x \equiv (\omega' - \omega) / k_B T_e \ll 1$  として、次のような流れで、フォッカー・プランク展開をする。一回散乱での計算と同様に

$$n_0(\omega') = n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n_0}{\partial x^k} (\Delta x)^k \quad (\text{B.32})$$

$$e^{\Delta x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k \quad (\text{B.33})$$

と展開できる。また、

$$f(\omega) \equiv \left[ \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \right]_1 = \frac{\theta_e X e^X}{(e^X - 1)^2} (Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \dots) \quad (\text{B.34})$$

と定義して、

$$\left[ \frac{\partial n(\omega')}{\partial t} \right]_1 = f(\omega') = f + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} (\Delta x)^k \quad (\text{B.35})$$

と展開できる。これらを用いて、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} &f(\omega') [n_0(\omega) (1 - e^{\Delta x}) - e^{\Delta x}] + f(\omega) [1 + n_0(\omega') (1 - e^{\Delta x})] \\ &= \left[ f + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} (\Delta x)^k \right] \left\{ n_0 \left[ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k \right] - 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k \right\} \\ &\quad + f \left\{ 1 + \left[ n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n_0}{\partial x^k} (\Delta x)^k \right] \left[ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k \right] \right\} \\ &= \left[ f + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} (\Delta x)^k \right] \left[ -1 - (1 + n_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k \right] \\ &\quad + f + f \left[ n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n_0}{\partial x^k} (\Delta x)^k \right] \left[ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k \right] \\ &= -f - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} (\Delta x)^k - (1 + n_0) f \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k - (1 + n_0) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j f}{\partial x^j} (\Delta x)^j \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} (\Delta x)^l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +f - n_0 f \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k - f \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j n_0}{\partial x^j} (\Delta x)^j \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} (\Delta x)^l \\
= & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} (\Delta x)^k - (1+n_0) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j f}{\partial x^j} (\Delta x)^j \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} (\Delta x)^l \\
& - f \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j n_0}{\partial x^j} (\Delta x)^j \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} (\Delta x)^l - (1+2n_0) f \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k \\
= & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \frac{(\Delta x)^k}{k!} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(j+l)!}{j!l!} (1+n_0) \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \frac{(\Delta x)^{j+l}}{(j+l)!} \\
& - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(j+l)!}{j!l!} f \frac{\partial^j n_0}{\partial x^j} \frac{(\Delta x)^{j+l}}{(j+l)!} - \sum_{k=1}^{\infty} (1+2n_0) f \frac{(\Delta x)^k}{k!} \tag{B.36}
\end{aligned}$$

ここで、 $\Delta x$  の同次項でまとめるために、 $j+l=k$  とする。 $j$  に  $j=k-l$  を代入すれば、 $k$  と  $l$  についての和で表せる。そのとき、 $j \geq 1$ 、 $l \geq 1$  に注意すると、 $l$  については  $1 \leq l \leq k-1$  の範囲で和をとることになるから、

$$\begin{aligned}
& f(\omega') [n_0(\omega) (1 - e^{\Delta x}) - e^{\Delta x}] + f(\omega) [1 + n_0(\omega') (1 - e^{\Delta x})] \\
& \simeq - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^k f}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-l)! l!} \left[ (1+n_0) \frac{\partial^{k-l} f}{\partial x^{k-l}} + f \frac{\partial^{k-l} n_0}{\partial x^{k-l}} \right] + (1+2n_0) f \right\} \frac{(\Delta x)^k}{k!} \tag{B.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \right]_2 & = -2\tau_1 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \\
& \quad \times \left\{ \left[ \frac{\partial n(\omega')}{\partial t} \right]_1 [n_0(\omega) (1 - e^{\Delta x}) - e^{\Delta x}] + \left[ \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \right]_1 [1 + n_0(\omega') (1 - e^{\Delta x})] \right\} \\
& \simeq 2\tau_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^k f}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-l)! l!} \left[ (1+n_0) \frac{\partial^{k-l} f}{\partial x^{k-l}} + f \frac{\partial^{k-l} n_0}{\partial x^{k-l}} \right] + (1+2n_0) f \right\} I_k \\
& = 2\tau_1 \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + n_0 (1+2n_0) f \right] I_1 \\
& \quad + 2\tau_1 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(1+n_0) \frac{\partial f}{\partial x} + 2f \frac{\partial n_0}{\partial x} + n_0 (1+2n_0) f \right] I_2 \\
& \quad + 2\tau_1 \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3(1+n_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3f \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2} + 3(1+n_0) \frac{\partial n_0}{\partial x} + 3f \frac{\partial n_0}{\partial x} + n_0 (1+2n_0) f \right] I_3 \\
& \quad \vdots \tag{B.38}
\end{aligned}$$

という表現ができる。このとき、

$$I_k \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \frac{(\Delta x)^k}{k!} \quad (k \geq 1) \tag{B.39}$$

である。これを一回散乱での計算と同様に  $\theta_e$  で展開して (B.38) 式に代入する。続いて、

$$\begin{aligned} x &= \frac{T_0}{T_e} \frac{\omega}{k_B T_0} \\ &= \frac{T_0}{T_e} X \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{T_e}{T_0} \frac{\partial}{\partial X} \quad (\text{B.41})$$

を代入する。その後、 $T_e \sim 10^8$  K と  $T_0 \simeq 2.726$  K の比のオーダーから、 $T_0/T_e \rightarrow 0$  とする。さらに、時間積分をして、

$$\Delta n_2(X) = \int \left[ \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} \right]_2 dt \quad (\text{B.42})$$

$$dt = \frac{dl_1}{c} = dl_1 \quad (\text{B.43})$$

$$\tau_2 \equiv \sigma_T \int_0^l N_e(l_1) dl_1 \sigma_T \int_0^{l_1} N_e(l_2) dl_2 = \frac{\tau^2}{2} \quad (\text{B.44})$$

を得る。一回散乱成分と二回散乱成分は、

$$\begin{aligned} \Delta n(X) &= \frac{\tau X e^X}{(e^X - 1)^2} \theta_e (Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \theta_e^6 Y_6 + \dots) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\tau^2 X e^X}{(e^X - 1)^2} \theta_e^2 (Z_0 + \theta_e Z_1 + \theta_e^2 Z_2 + \theta_e^3 Z_3 + \theta_e^4 Z_4 + \theta_e^5 Z_5 + \theta_e^6 Z_6 + \dots) \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

という結果が得られる。

### B.3 $Z_0$ $Z_{10}$ までの計算結果

$$Z_0 = -16 + 34\tilde{X} - 12\tilde{X}^2 + \tilde{X}^3 + \tilde{S}^2 (-6 + 2\tilde{X}) \quad (\text{B.46})$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= -80 + 590\tilde{X} - \frac{3492}{5}\tilde{X}^2 + \frac{1271}{5}\tilde{X}^3 - \frac{168}{5}\tilde{X}^4 + \frac{7}{5}\tilde{X}^5 \\ &\quad + \tilde{S}^2 \left( -\frac{1746}{5} + \frac{2542}{5}\tilde{X} - \frac{924}{5}\tilde{X}^2 + \frac{91}{5}\tilde{X}^3 \right) \\ &\quad + \tilde{S}^4 \left( -\frac{168}{5} + \frac{119}{10}\tilde{X} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= -160 + 4792\tilde{X} - \frac{357144}{25}\tilde{X}^2 + \frac{312912}{25}\tilde{X}^3 - \frac{110196}{25}\tilde{X}^4 \\ &\quad + \frac{34873}{50}\tilde{X}^5 - \frac{734}{15}\tilde{X}^6 + \frac{367}{300}\tilde{X}^7 \\ &\quad + \tilde{S}^2 \left( -\frac{178572}{25} + \frac{625824}{25}\tilde{X} - \frac{606078}{25}\tilde{X}^2 + \frac{453349}{50}\tilde{X}^3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{6973}{5}\tilde{X}^4 + \frac{367}{5}\tilde{X}^5) \\
+ \tilde{S}^4 & \left( -\frac{110196}{25} + \frac{592841}{100}\tilde{X} - 2202\tilde{X}^2 + \frac{5872}{25}\tilde{X}^3 \right) \\
+ \tilde{S}^6 & \left( -\frac{6239}{30} + \frac{11377}{150}\tilde{X} \right)
\end{aligned} \tag{B.48}$$

$$\begin{aligned}
Z_3 = & -90 + \frac{96651}{4}\tilde{X} - \frac{8659449}{50}\tilde{X}^2 + \frac{62384943}{200}\tilde{X}^3 - \frac{38586081}{175}\tilde{X}^4 \\
& + \frac{103117227}{1400}\tilde{X}^5 - \frac{1325008}{105}\tilde{X}^6 + \frac{590831}{525}\tilde{X}^7 - \frac{1718}{35}\tilde{X}^8 + \frac{859}{1050}\tilde{X}^9 \\
+ \tilde{S}^2 & \left( -\frac{8659449}{100} + \frac{62384943}{100}\tilde{X} - \frac{424446891}{350}\tilde{X}^2 + \frac{1340523951}{1400}\tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{12587576}{35}\tilde{X}^4 + \frac{2363324}{35}\tilde{X}^5 - \frac{212173}{35}\tilde{X}^6 + \frac{215609}{1050}\tilde{X}^7 \right) \\
+ \tilde{S}^4 & \left( -\frac{38586081}{175} + \frac{1752992859}{2800}\tilde{X} - \frac{3975024}{7}\tilde{X}^2 + \frac{37813184}{175}\tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{1247268}{35}\tilde{X}^4 + \frac{1459441}{700}\tilde{X}^5 \right) \\
+ \tilde{S}^6 & \left( -\frac{5631284}{105} + \frac{36631522}{525}\tilde{X} - \frac{920848}{35}\tilde{X}^2 + \frac{1544482}{525}\tilde{X}^3 \right) \\
+ \tilde{S}^8 & \left( -\frac{53258}{35} + \frac{593569}{1050}\tilde{X} \right)
\end{aligned} \tag{B.49}$$

$$\begin{aligned}
Z_4 = & 60 + 82497\tilde{X} - \frac{36883086}{25}\tilde{X}^2 + \frac{129233103}{25}\tilde{X}^3 - \frac{1154992263}{175}\tilde{X}^4 \\
& + \frac{5504779501}{1400}\tilde{X}^5 - \frac{129898756}{105}\tilde{X}^6 + \frac{114929504}{525}\tilde{X}^7 - \frac{2337809}{105}\tilde{X}^8 \\
& + \frac{2681837}{2100}\tilde{X}^9 - \frac{2851}{75}\tilde{X}^{10} + \frac{2851}{6300}\tilde{X}^{11} \\
+ \tilde{S}^2 & \left( -\frac{18441543}{25} + \frac{258466206}{25}\tilde{X} - \frac{12704914893}{350}\tilde{X}^2 + \frac{71562133513}{1400}\tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{1234038182}{35}\tilde{X}^4 + \frac{459718016}{35}\tilde{X}^5 - \frac{577438823}{210}\tilde{X}^6 + \frac{673141087}{2100}\tilde{X}^7 \right. \\
& \left. - \frac{2888063}{150}\tilde{X}^8 + \frac{1451159}{3150}\tilde{X}^9 \right) \\
+ \tilde{S}^4 & \left( -\frac{1154992263}{175} + \frac{93581251517}{2800}\tilde{X} - \frac{389696268}{7}\tilde{X}^2 + \frac{7355488256}{175}\tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{565749778}{35}\tilde{X}^4 + \frac{4556441063}{1400}\tilde{X}^5 - \frac{24301924}{75}\tilde{X}^6 + \frac{39340949}{3150}\tilde{X}^7 \right) \\
+ \tilde{S}^6 & \left( -\frac{552069713}{105} + \frac{7125629248}{525}\tilde{X} - \frac{1253065624}{105}\tilde{X}^2 + \frac{2410971463}{525}\tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{236692871}{300}\tilde{X}^4 + \frac{309598643}{6300}\tilde{X}^5 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{S}^8 \left( -\frac{72472079}{105} + \frac{1853149367}{2100} \tilde{X} - \frac{25228499}{75} \tilde{X}^2 + \frac{488977861}{12600} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{10} \left( -\frac{1970041}{150} + \frac{15569311}{3150} \tilde{X} \right)
\end{aligned} \tag{B.50}$$

$$\begin{aligned}
Z_5 = & -\frac{135}{8} + \frac{12368565}{64} \tilde{X} - \frac{1523246139}{160} \tilde{X}^2 + \frac{41024053941}{640} \tilde{X}^3 - \frac{78913341669}{560} \tilde{X}^4 \\
& + \frac{124274226315}{896} \tilde{X}^5 - \frac{2505515368}{35} \tilde{X}^6 + \frac{29643451897}{1400} \tilde{X}^7 - \frac{105635617}{28} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{10436409287}{25200} \tilde{X}^9 - \frac{6284921}{225} \tilde{X}^{10} + \frac{2347649}{2100} \tilde{X}^{11} - \frac{16312}{675} \tilde{X}^{12} + \frac{2039}{9450} \tilde{X}^{13} \\
& + \tilde{S}^2 \left( -\frac{1523246139}{320} + \frac{41024053941}{320} \tilde{X} - \frac{868046758359}{1120} \tilde{X}^2 + \frac{1615564942095}{896} \tilde{X}^3 \right. \\
& - \frac{71407187988}{35} \tilde{X}^4 + \frac{88930355691}{70} \tilde{X}^5 - \frac{26091997399}{56} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{2619538731037}{25200} \tilde{X}^7 - \frac{6366624973}{450} \tilde{X}^8 + \frac{1194953341}{1050} \tilde{X}^9 \\
& \left. - \frac{11100316}{225} \tilde{X}^{10} + \frac{2779157}{3150} \tilde{X}^{11} \right) \\
& + \tilde{S}^4 \left( -\frac{78913341669}{560} + \frac{2112661847355}{1792} \tilde{X} - \frac{22549638312}{7} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{711442845528}{175} \tilde{X}^3 - \frac{38345728971}{14} \tilde{X}^4 + \frac{17731459378613}{16800} \tilde{X}^5 \\
& \left. - \frac{53572666604}{225} \tilde{X}^6 + \frac{32395208551}{1050} \tilde{X}^7 - \frac{19003480}{9} \tilde{X}^8 + \frac{74038129}{1260} \tilde{X}^9 \right) \\
& + \tilde{S}^6 \left( -\frac{10648440314}{35} + \frac{918947008807}{700} \tilde{X} - \frac{14155172678}{7} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{9382331949013}{6300} \tilde{X}^3 - \frac{521780426341}{900} \tilde{X}^4 + \frac{254938247857}{2100} \tilde{X}^5 \\
& \left. - \frac{1732220216}{135} \tilde{X}^6 + \frac{504318104}{945} \tilde{X}^7 \right) \\
& + \tilde{S}^8 \left( -\frac{3274704127}{28} + \frac{7211558817317}{25200} \tilde{X} - \frac{55615265929}{225} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{402647627639}{4200} \tilde{X}^3 - \frac{761509408}{45} \tilde{X}^4 + \frac{692470907}{630} \tilde{X}^5 \left. \right) \\
& + \tilde{S}^{10} \left( -\frac{4342880411}{450} + \frac{12820511189}{1050} \tilde{X} - \frac{1055741186}{225} \tilde{X}^2 + \frac{3487385299}{6300} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{12} \left( -\frac{89079832}{675} + \frac{1895391191}{37800} \tilde{X} \right)
\end{aligned} \tag{B.51}$$

$$\begin{aligned}
Z_6 = & \frac{2310525}{8} \tilde{X} - \frac{4808540583}{100} \tilde{X}^2 + \frac{252517854951}{400} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{11473454766573}{4900} \tilde{X}^4 + \frac{143434835467311}{39200} \tilde{X}^5 - \frac{429688246765}{147} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{9794517932561}{7350} \tilde{X}^7 - \frac{72661274793}{196} \tilde{X}^8 + \frac{2312186142587}{35280} \tilde{X}^9
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{11845630792}{1575}\tilde{X}^{10} + \frac{2067628712}{3675}\tilde{X}^{11} - \frac{127687796}{4725}\tilde{X}^{12} \\
& + \frac{105557789}{132300}\tilde{X}^{13} - \frac{48128}{3675}\tilde{X}^{14} + \frac{3008}{33075}\tilde{X}^{15} \\
+ \tilde{S}^2 & \left( -\frac{4808540583}{200} + \frac{252517854951}{200}\tilde{X} - \frac{126208002432303}{9800}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{1864652861075043}{39200}\tilde{X}^3 - \frac{8164076688535}{98}\tilde{X}^4 + \frac{19589035865122}{245}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{17947334873871}{392}\tilde{X}^6 + \frac{580358721789337}{35280}\tilde{X}^7 - \frac{5999811996148}{1575}\tilde{X}^8 \\
& + \frac{2104846028816}{3675}\tilde{X}^9 - \frac{86891545178}{1575}\tilde{X}^{10} + \frac{143875266407}{44100}\tilde{X}^{11} \\
& \left. - \frac{393903616}{3675}\tilde{X}^{12} + \frac{49259008}{33075}\tilde{X}^{13} \right) \\
+ \tilde{S}^4 & \left( -\frac{11473454766573}{4900} + \frac{2438392202944287}{78400}\tilde{X} \right. \\
& - \frac{6445323701475}{49}\tilde{X}^2 + \frac{313424573841952}{1225}\tilde{X}^3 - \frac{26376042749859}{98}\tilde{X}^4 \\
& + \frac{3928404256255313}{23520}\tilde{X}^5 - \frac{100972156871008}{1575}\tilde{X}^6 + \frac{57062417193776}{3675}\tilde{X}^7 \\
& - \frac{148756282340}{63}\tilde{X}^8 + \frac{3832908876379}{17640}\tilde{X}^9 \\
& \left. - \frac{13467610112}{1225}\tilde{X}^{10} + \frac{2574414848}{11025}\tilde{X}^{11} \right) \\
+ \tilde{S}^6 & \left( -\frac{7304700195005}{588} + \frac{303630055909391}{3675}\tilde{X} - \frac{9736610822262}{49}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{2078655342185713}{8820}\tilde{X}^3 - \frac{245859028495658}{1575}\tilde{X}^4 + \frac{224530004722216}{3675}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{13559550120628}{945}\tilde{X}^6 + \frac{13054120650052}{6615}\tilde{X}^7 \\
& \left. - \frac{107026432768}{735}\tilde{X}^8 + \frac{29281785088}{6615}\tilde{X}^9 \right) \\
+ \tilde{S}^8 & \left( -\frac{2252499518583}{196} + \frac{1597720624527617}{35280}\tilde{X} - \frac{104821986878408}{1575}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{177310534011916}{3675}\tilde{X}^3 - \frac{5960977068464}{315}\tilde{X}^4 + \frac{35848797395657}{8820}\tilde{X}^5 \\
& \left. - \frac{328499926016}{735}\tilde{X}^6 + \frac{129412835072}{6615}\tilde{X}^7 \right) \\
+ \tilde{S}^{10} & \left( -\frac{4092665438636}{1575} + \frac{22582640792464}{3675}\tilde{X} - \frac{8264177610763}{1575}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{180539814396049}{88200}\tilde{X}^3 - \frac{451257055744}{1225}\tilde{X}^4 + \frac{271877622784}{11025}\tilde{X}^5 \left. \right) \\
+ \tilde{S}^{12} & \left( -\frac{697303053956}{4725} + \frac{98123248362941}{529200}\tilde{X} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{263501425664}{3675}\tilde{X}^2 + \frac{284503269632}{33075}\tilde{X}^3) \\
+ \tilde{S}^{14} & \left( -\frac{5592287104}{3675} + \frac{19264982656}{33075}\tilde{X} \right) \tag{B.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_7 = & -\frac{7425}{64} + \frac{97088895}{512}\tilde{X} - \frac{1222337267253}{6400}\tilde{X}^2 + \frac{130359634505091}{25600}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{711605106982737}{22400}\tilde{X}^4 + \frac{13836548832678459}{179200}\tilde{X}^5 - \frac{15517594943657}{168}\tilde{X}^6 \\
& +\frac{166674106414085}{2688}\tilde{X}^7 - \frac{3121309975423931}{123200}\tilde{X}^8 + \frac{29449145431967693}{4435200}\tilde{X}^9 \\
& -\frac{31998166697201}{27720}\tilde{X}^{10} + \frac{175594056521981}{1293600}\tilde{X}^{11} - \frac{2826080185913}{259875}\tilde{X}^{12} \\
& +\frac{17178303350393}{29106000}\tilde{X}^{13} - \frac{1429785592}{67375}\tilde{X}^{14} + \frac{250186931}{519750}\tilde{X}^{15} - \frac{752408}{121275}\tilde{X}^{16} + \frac{188102}{5457375}\tilde{X}^{17} \\
+ \tilde{S}^2 & \left( -\frac{1222337267253}{12800} + \frac{130359634505091}{12800}\tilde{X} - \frac{7827656176810107}{44800}\tilde{X}^2 \right. \\
& +\frac{179875134824819967}{179200}\tilde{X}^3 - \frac{294834303929483}{112}\tilde{X}^4 + \frac{833370532070425}{224}\tilde{X}^5 \\
& -\frac{770963563929710957}{246400}\tilde{X}^6 + \frac{7391735503423890943}{4435200}\tilde{X}^7 - \frac{32414142864264613}{55440}\tilde{X}^8 \\
& +\frac{89377374769688329}{646800}\tilde{X}^9 - \frac{3846295133027593}{173250}\tilde{X}^{10} + \frac{23414027466585659}{9702000}\tilde{X}^{11} \\
& \left. -\frac{11702080177724}{67375}\tilde{X}^{12} + \frac{2048530591028}{259875}\tilde{X}^{13} - \frac{24648509876}{121275}\tilde{X}^{14} + \frac{160074802}{70875}\tilde{X}^{15} \right) \\
+ \tilde{S}^4 & \left( -\frac{711605106982737}{22400} + \frac{235221330155533803}{358400}\tilde{X} - \frac{232763924154855}{56}\tilde{X}^2 \right. \\
& +\frac{166674106414085}{14}\tilde{X}^3 - \frac{103003229188989723}{5600}\tilde{X}^4 + \frac{50034098088913110407}{2956800}\tilde{X}^5 \\
& -\frac{68188093231735331}{6930}\tilde{X}^6 + \frac{2423022385946815819}{646800}\tilde{X}^7 \\
& -\frac{658476683317729}{693}\tilde{X}^8 + \frac{56705579359647293}{352800}\tilde{X}^9 - \frac{109116947024664}{6125}\tilde{X}^{10} \\
& \left. +\frac{107061993008968}{86625}\tilde{X}^{11} - \frac{5875665428384}{121275}\tilde{X}^{12} + \frac{4449883963571}{5457375}\tilde{X}^{13} \right) \\
+ \tilde{S}^6 & \left( -\frac{263799114042169}{672} + \frac{5166897298836635}{1344}\tilde{X} - \frac{209127768353403377}{15400}\tilde{X}^2 \right. \\
& +\frac{26474781743338956007}{1108800}\tilde{X}^3 - \frac{2656519797368324221}{110880}\tilde{X}^4 + \frac{19068285379891482733}{1293600}\tilde{X}^5 \\
& -\frac{300109933182659209}{51975}\tilde{X}^6 + \frac{531101604684100381}{363825}\tilde{X}^7 - \frac{3179538969723302}{13475}\tilde{X}^8 \\
& \left. +\frac{1217739352621058}{51975}\tilde{X}^9 - \frac{157113582940352}{121275}\tilde{X}^{10} + \frac{15084280098448}{496125}\tilde{X}^{11} \right) \\
+ \tilde{S}^8 & \left( -\frac{96760609238141861}{123200} + \frac{20349359493489675863}{4435200}\tilde{X} - \frac{283151777103531649}{27720}\tilde{X}^2 \right. \\
& \left. +\frac{30116312228141483291}{2587200}\tilde{X}^3 - \frac{11993884309014772}{1575}\tilde{X}^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5833975135737017909}{1940400} \tilde{X}^5 - \frac{9759068758118824}{13475} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{5381881655364502}{51975} \tilde{X}^7 - \frac{194813691539056}{24255} \tilde{X}^8 + \frac{282795510158908}{1091475} \tilde{X}^9 \Big) \\
+ \tilde{S}^{10} & \left( -\frac{22110733187765891}{55440} + \frac{958919142666538241}{646800} \tilde{X} - \frac{731635421090458831}{346500} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{29380756530614514013}{19404000} \tilde{X}^3 - \frac{3656164073405268}{6125} \tilde{X}^4 \\
& + \left. \frac{11306553865010744}{86625} \tilde{X}^5 - \frac{1790601425683472}{121275} \tilde{X}^6 + \frac{332724599656408}{496125} \tilde{X}^7 \right) \\
+ \tilde{S}^{12} & \left( -\frac{15433223895270893}{259875} + \frac{15968418267121470617}{116424000} \tilde{X} - \frac{7828094703412696}{67375} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{11831615672987962}{259875} \tilde{X}^3 - \frac{91654360816864}{11025} \tilde{X}^4 + \frac{3107297514987236}{5457375} \tilde{X}^5 \Big) \\
+ \tilde{S}^{14} & \left( -\frac{166135545371231}{67375} + \frac{801171357458921}{259875} \tilde{X} - \frac{145297480288496}{121275} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \left. \frac{794693945069744}{5457375} \tilde{X}^3 \right) \\
+ \tilde{S}^{16} & \left( -\frac{2409429366728}{121275} + \frac{41745586147262}{5457375} \tilde{X} \right) \tag{B.53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_8 = & 675 - \frac{387045}{4} \tilde{X} - \frac{29211251373}{50} \tilde{X}^2 + \frac{852417952857}{25} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{1772124191636301}{4900} \tilde{X}^4 + \frac{53149849031963007}{39200} \tilde{X}^5 - \frac{1401315611345291}{588} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{26948037029579767}{11760} \tilde{X}^7 - \frac{285771169184667599}{215600} \tilde{X}^8 + \frac{3810572956513200337}{7761600} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{240515303839073}{1980} \tilde{X}^{10} + \frac{13358379764254099}{646800} \tilde{X}^{11} - \frac{638244896394439}{259875} \tilde{X}^{12} \\
& + \frac{5995664444857159}{29106000} \tilde{X}^{13} - \frac{820428095376}{67375} \tilde{X}^{14} + \frac{304077691466}{606375} \tilde{X}^{15} \\
& - \frac{1698615488}{121275} \tilde{X}^{16} + \frac{915950053}{3638250} \tilde{X}^{17} - \frac{259541}{99225} \tilde{X}^{18} + \frac{259541}{21829500} \tilde{X}^{19} \\
+ \tilde{S}^2 & \left( -\frac{29211251373}{100} + \frac{1704835905714}{25} \tilde{X} - \frac{19493366107999311}{9800} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{690948037415519091}{39200} \tilde{X}^3 - \frac{26624996615560529}{392} \tilde{X}^4 + \frac{26948037029579767}{196} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{70585478788612896953}{431200} \tilde{X}^6 + \frac{956453812084813284587}{7761600} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{243642002788980949}{3960} \tilde{X}^8 + \frac{6799415300005336391}{323400} \tilde{X}^9 - \frac{868651303992831479}{173250} \tilde{X}^{10} \\
& + \frac{8172090638340307717}{9702000} \tilde{X}^{11} - \frac{6714793746604872}{67375} \tilde{X}^{12} + \frac{4979576275447216}{606375} \tilde{X}^{13} \\
& - \frac{55645794079136}{121275} \tilde{X}^{14} + \frac{779473495103}{47250} \tilde{X}^{15} - \frac{302365265}{882} \tilde{X}^{16} + \left. \frac{3779695583}{1212750} \tilde{X}^{17} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{S}^4 \left( -\frac{1772124191636301}{4900} + \frac{903547433543371119}{78400} \tilde{X} - \frac{21019734170179365}{196} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{107792148118319068}{245} \tilde{X}^3 - \frac{9430448583094030767}{9800} \tilde{X}^4 + \frac{6474163453115927372563}{5174400} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{512538112481064563}{495} \tilde{X}^6 + \frac{184332282366942312101}{323400} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{148711060859904287}{693} \tilde{X}^8 + \frac{19791688332473481859}{352800} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{62612610954810192}{6125} \tilde{X}^{10} + \frac{260246716707324896}{202125} \tilde{X}^{11} - \frac{13264739740884224}{121275} \tilde{X}^{12} \\
& \left. + \frac{43336822067566613}{7276500} \tilde{X}^{13} - \frac{6182416634698}{33075} \tilde{X}^{14} + \frac{94131108503}{36750} \tilde{X}^{15} \right) \\
& + \tilde{S}^6 \left( -\frac{23822365392869947}{2352} + \frac{835389147916972777}{5880} \tilde{X} - \frac{19146668335372729133}{26950} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{3425705087905367102963}{1940400} \tilde{X}^3 - \frac{19967821040023679533}{7920} \tilde{X}^4 \\
& + \frac{1450626533739645372707}{646800} \tilde{X}^5 - \frac{67777140282814660727}{51975} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{185367957641648784803}{363825} \tilde{X}^7 - \frac{1824457538038932756}{13475} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{2960085642141816376}{121275} \tilde{X}^9 - \frac{354695278834959872}{121275} \tilde{X}^{10} \\
& \left. + \frac{36725944316488636}{165375} \tilde{X}^{11} - \frac{60678510586879}{6300} \tilde{X}^{12} + \frac{37643589679067}{207900} \tilde{X}^{13} \right) \\
& + \tilde{S}^8 \left( -\frac{8858906244724695569}{215600} + \frac{2633105912950621432867}{7761600} \tilde{X} - \frac{2128319923671956977}{1980} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{2291109071746984773589}{1293600} \tilde{X}^3 - \frac{2708711340297999116}{1575} \tilde{X}^4 \\
& + \frac{203620558911274339467}{1940400} \tilde{X}^5 - \frac{5599870525109370672}{13475} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{13082299246929507944}{121275} \tilde{X}^7 - \frac{439806001162527616}{24255} \tilde{X}^8 \\
& \left. + \frac{688526869778667481}{363825} \tilde{X}^9 - \frac{174827688100514}{1575} \tilde{X}^{10} + \frac{1930312412765777}{693000} \tilde{X}^{11} \right) \\
& + \tilde{S}^{10} \left( -\frac{166196074952799443}{3960} + \frac{72950111892591634639}{323400} \tilde{X} - \frac{165233306492867129393}{346500} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{10254630722281438181219}{19404000} \tilde{X}^3 - \frac{2097950730451927704}{6125} \tilde{X}^4 \\
& + \frac{27484015923345307168}{202125} \tilde{X}^5 - \frac{4042412247744344192}{121275} \tilde{X}^6 \\
& \left. + \frac{810090043406478106}{165375} \tilde{X}^7 - \frac{265846057283887}{675} \tilde{X}^8 + \frac{382998603539749}{28875} \tilde{X}^9 \right) \\
& + \tilde{S}^{12} \left( -\frac{3485455379210031379}{259875} + \frac{5573383802341424434471}{116424000} \tilde{X} - \frac{4491854487748839888}{67375} \tilde{X}^2 \right. \\
& \left. + \frac{28760338246086271064}{606375} \tilde{X}^3 - \frac{206916349674997504}{11025} \tilde{X}^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{7565388256210266527}{1819125} \tilde{X}^5 - \frac{454160444366756}{945} \tilde{X}^6 + \frac{833546612742332}{37125} \tilde{X}^7 \Big) \\
+ \tilde{S}^{14} & \left( -\frac{95330565523821618}{67375} + \frac{1947490509364697212}{606375} \tilde{X} - \frac{328019572340291456}{121275} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{1934854390451486708}{1819125} \tilde{X}^3 - \frac{721874509066993}{3675} \tilde{X}^4 + \frac{8305150942611073}{606375} \tilde{X}^5 \Big) \\
+ \tilde{S}^{16} & \left( -\frac{5439461089683008}{121275} + \frac{203277327429270793}{3638250} \tilde{X} - \frac{721055087779039}{33075} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{28864054745507}{10780} \tilde{X}^3 \Big) \\
+ \tilde{S}^{18} & \left( -\frac{57600084923321}{198450} + \frac{1225582843976861}{10914750} \tilde{X} \right) \tag{B.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_9 = & -\frac{5716575}{2048} - \frac{712307115}{16384} \tilde{X} - \frac{53478412581339}{40960} \tilde{X}^2 + \frac{31100390895173733}{163840} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{502781754480920721}{143360} \tilde{X}^4 + \frac{3325681861227511821}{163840} \tilde{X}^5 - \frac{11627885912123209}{224} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{12594490460272652453}{179200} \tilde{X}^7 - \frac{7915277597603095461}{140800} \tilde{X}^8 + \frac{337682546305005247727}{11827200} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{92978013607990233689}{9609600} \tilde{X}^{10} + \frac{40634464745833234669}{17937920} \tilde{X}^{11} \\
& - \frac{6763724664910402927}{18018000} \tilde{X}^{12} + \frac{90278540532324113647}{2018016000} \tilde{X}^{13} - \frac{3387831607554819}{875875} \tilde{X}^{14} \\
& + \frac{625697507310091}{2574000} \tilde{X}^{15} - \frac{3481283602417}{315315} \tilde{X}^{16} + \frac{11251974691379}{31531500} \tilde{X}^{17} \\
& - \frac{1468025159}{184275} \tilde{X}^{18} + \frac{4713758111}{40540500} \tilde{X}^{19} - \frac{43636}{43875} \tilde{X}^{20} + \frac{10909}{2895750} \tilde{X}^{21} \\
+ \tilde{S}^2 & \left( -\frac{53478412581339}{81920} + \frac{31100390895173733}{81920} \tilde{X} - \frac{5530599299290127931}{286720} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{43233864195957653673}{163840} \tilde{X}^3 - \frac{662789496991022913}{448} \tilde{X}^4 + \frac{37783471380817957359}{8960} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{1955073566607964578867}{281600} \tilde{X}^6 + \frac{84758319122556317179477}{11827200} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{94186727784894106726957}{19219200} \tilde{X}^8 + \frac{20682942555629116446521}{8968960} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{9205429268943058383647}{12012000} \tilde{X}^{10} + \frac{123049650745557766900861}{672672000} \tilde{X}^{11} \\
& - \frac{55455415584064832211}{1751750} \tilde{X}^{12} + \frac{1280802797463756277}{321750} \tilde{X}^{13} \\
& - \frac{228090220346759423}{630630} \tilde{X}^{14} + \frac{9575430462363529}{409500} \tilde{X}^{15} - \frac{1710249310235}{1638} \tilde{X}^{16} \\
& + \frac{68646459370493}{2252250} \tilde{X}^{17} - \frac{4575474598}{8775} \tilde{X}^{18} + \frac{2287759117}{579150} \tilde{X}^{19} \Big) \\
+ \tilde{S}^4 & \left( -\frac{502781754480920721}{143360} + \frac{56536591640867700957}{327680} \tilde{X} - \frac{523254866045544405}{224} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{37783471380817957359}{2800} \tilde{X}^3 - \frac{261204160720902150213}{6400} \tilde{X}^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{573722646172203915888173}{7884800} \tilde{X}^5 - \frac{198136146998627187991259}{2402400} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{560714979027752805197531}{8968960} \tilde{X}^7 - \frac{1575947846924123881991}{48048} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{298009462297201899148747}{24460800} \tilde{X}^9 - \frac{258549144793761121623}{79625} \tilde{X}^{10} \\
& + \frac{33469185363524077681}{53625} \tilde{X}^{11} - \frac{27185858881247510716}{315315} \tilde{X}^{12} \\
& + \frac{532370540852028835459}{63063000} \tilde{X}^{13} - \frac{34969207805921902}{61425} \tilde{X}^{14} \\
& + \left( \frac{1709599932971813}{68250} \tilde{X}^{15} - \frac{48374738692}{75} \tilde{X}^{16} + \frac{945595141793}{128700} \tilde{X}^{17} \right) \\
& + \tilde{S}^6 \left( -\frac{197674060506094553}{896} + \frac{390429204268452226043}{89600} \tilde{X} - \frac{530323599039407395887}{17600} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{303576609128199717706573}{2956800} \tilde{X}^3 - \frac{7719127667748957191094469}{38438400} \tilde{X}^4 \\
& + \frac{4412618430144268452410717}{17937920} \tilde{X}^5 - \frac{718260213340830418026911}{3603600} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{2791141637637864621624299}{25225200} \tilde{X}^7 - \frac{30135266936109640673031}{700700} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{1522734369942768752969}{128700} \tilde{X}^9 - \frac{726941951716662669448}{315315} \tilde{X}^{10} \\
& + \frac{225579656124614340274}{716625} \tilde{X}^{11} - \frac{343211978655342421}{11700} \tilde{X}^{12} \\
& \left. + \frac{683679172758284657}{386100} \tilde{X}^{13} - \frac{181910249319532}{2925} \tilde{X}^{14} + \frac{92841739468754}{96525} \tilde{X}^{15} \right) \\
& + \tilde{S}^8 \left( -\frac{245373605525695959291}{140800} + \frac{233338639496758626179357}{11827200} \tilde{X} \right. \\
& - \frac{822762442417105577913961}{9609600} \tilde{X}^2 + \frac{6969257683022603911314859}{35875840} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{7176311869469937505547}{27300} \tilde{X}^4 + \frac{30659765985804189207998611}{134534400} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{23123803865450972160993}{175175} \tilde{X}^6 + \frac{6729827819022799280611}{128700} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{901374932059785521594}{63063} \tilde{X}^8 + \frac{8458198007314238292383}{3153150} \tilde{X}^9 - \frac{988866670858783286}{2925} \tilde{X}^{10} \\
& \left. + \frac{35058144156178258067}{1287000} \tilde{X}^{11} - \frac{3695623019335772}{2925} \tilde{X}^{12} + \frac{2468935855239448}{96525} \tilde{X}^{13} \right) \\
& + \tilde{S}^{10} \left( -\frac{64247807403121251479099}{19219200} + \frac{221904811976995294527409}{8968960} \tilde{X} \right. \\
& - \frac{1751040387324659482562249}{24024000} \tilde{X}^2 + \frac{154407089292595756859123627}{1345344000} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{17326329597380282379777}{159250} \tilde{X}^4 + \frac{3534598380762591493823}{53625} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{8284855266951406033078}{315315} \tilde{X}^6 + \frac{4975769495450756418379}{716625} \tilde{X}^7 \\
& \left. - \frac{1751040387324659482562249}{24024000} \tilde{X}^2 + \frac{154407089292595756859123627}{1345344000} \tilde{X}^3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{10525816358863953091}{8775}\tilde{X}^8 + \frac{6955982961987374479}{53625}\tilde{X}^9 \\
& -\frac{38701255504228037}{4875}\tilde{X}^{10} + \frac{134581881609362971}{643500}\tilde{X}^{11} \Big) \\
+ & \tilde{S}^{12} \left( -\frac{36936700395075710384347}{18018000} + \frac{83920132644091993998728143}{8072064000}\tilde{X} \right. \\
& -\frac{18548422093173532237647}{875875}\tilde{X}^2 + \frac{14794962319673629555141}{643500}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{424071545493614949236}{28665}\tilde{X}^4 + \frac{92936898590183087947561}{15765750}\tilde{X}^5 \\
& -\frac{2568838675018658444}{1755}\tilde{X}^6 + \frac{105971541093604493804}{482625}\tilde{X}^7 \\
& \left. -\frac{53059260588421304}{2925}\tilde{X}^8 + \frac{487518590631633239}{772200}\tilde{X}^9 \right) \\
+ & \tilde{S}^{14} \left( -\frac{3149223239603125543011}{7007000} + \frac{2003665496381538618481}{1287000}\tilde{X} - \frac{672270544173969978154}{315315}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{11884344873149797348022}{7882875}\tilde{X}^3 - \frac{4083092617163066107}{6825}\tilde{X}^4 \\
& \left. + \frac{150837334443545493283}{1126125}\tilde{X}^5 - \frac{46036944777647392}{2925}\tilde{X}^6 + \frac{72566575071858044}{96525}\tilde{X}^7 \right) \\
+ & \tilde{S}^{16} \left( -\frac{11148083148467537347}{315315} + \frac{2497157280655037161199}{31531500}\tilde{X} - \frac{313727521303017097}{4725}\tilde{X}^2 \right. \\
& \left. + \frac{5242262122936189897}{20020}\tilde{X}^3 - \frac{4758051520483876}{975}\tilde{X}^4 + \frac{22214852115500569}{64350}\tilde{X}^5 \right) \\
+ & \tilde{S}^{18} \left( -\frac{325799676459487379}{368550} + \frac{22258915051950851831}{20270250}\tilde{X} - \frac{3772319621333914}{8775}\tilde{X}^2 \right. \\
& \left. + \frac{30842030895512227}{579150}\tilde{X}^3 \right) \\
+ & \tilde{S}^{20} \left( -\frac{206054276510356}{43875} + \frac{10564097574141743}{5791500}\tilde{X} \right) \tag{B.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{10} = & \frac{91125}{8} + \frac{21438675}{128}\tilde{X} - \frac{607296231621}{320}\tilde{X}^2 + \frac{1115737995860937}{1280}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{65356894821275343}{2240}\tilde{X}^4 + \frac{4712475624988559301}{17920}\tilde{X}^5 - \frac{27311138259540955}{28}\tilde{X}^6 \\
& + \frac{18410040997415653}{10}\tilde{X}^7 - \frac{2470816192013890991}{1232}\tilde{X}^8 + \frac{101184393090441496963}{73920}\tilde{X}^9 \\
& -\frac{1144746381575325625}{1848}\tilde{X}^{10} + \frac{10013612053934469175}{51744}\tilde{X}^{11} - \frac{425435768722970419}{9900}\tilde{X}^{12} \\
& + \frac{10751805350563854881}{1552320}\tilde{X}^{13} - \frac{99688344381420658}{121275}\tilde{X}^{14} + \frac{23433617409470623}{323400}\tilde{X}^{15} \\
& -\frac{577302804852667}{121275}\tilde{X}^{16} + \frac{5075875341420931}{21829500}\tilde{X}^{17} - \frac{830418475216}{99225}\tilde{X}^{18} \\
& + \frac{108140875343}{496125}\tilde{X}^{19} - \frac{5921877194}{1488375}\tilde{X}^{20} + \frac{3149587499}{65488500}\tilde{X}^{21} - \frac{5641586}{16372125}\tilde{X}^{22} + \frac{2820793}{2554051500}\tilde{X}^{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{S}^2 \left( -\frac{607296231621}{640} + \frac{1115737995860937}{640} \tilde{X} - \frac{718925843034028773}{4480} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{61262183124851270913}{17920} \tilde{X}^3 - \frac{1556734880793834435}{56} \tilde{X}^4 + 110460245984493918 \tilde{X}^5 \\
& - \frac{610291599427431074777}{2464} \tilde{X}^6 + \frac{25397282665700815737713}{73920} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{1159628084535804858125}{3696} \tilde{X}^8 + \frac{5096928535452644810075}{25872} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{579018081231962740259}{6600} \tilde{X}^{10} + \frac{14654710692818534202803}{517440} \tilde{X}^{11} \\
& - \frac{815899254589737375401}{121275} \tilde{X}^{12} + \frac{47968614837186365281}{40425} \tilde{X}^{13} \\
& - \frac{37824302471141889173}{242550} \tilde{X}^{14} + \frac{4319569915549212281}{283500} \tilde{X}^{15} \\
& - \frac{483718761813320}{441} \tilde{X}^{16} + \frac{3149711135240218}{55125} \tilde{X}^{17} - \frac{620941394115467}{297675} \tilde{X}^{18} \\
& \left. + \frac{94358491882541}{1871100} \tilde{X}^{19} - \frac{1690171212119}{2338875} \tilde{X}^{20} + \frac{2957807378389}{638512875} \tilde{X}^{21} \right) \\
& + \tilde{S}^4 \left( -\frac{65356894821275343}{2240} + \frac{80112085624805508117}{35840} \tilde{X} - \frac{1229001221679342975}{28} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{1767363935751902688}{5} \tilde{X}^3 - \frac{81536934336458402703}{56} \tilde{X}^4 \\
& + \frac{171912283860660103340137}{49280} \tilde{X}^5 - \frac{2439454539137018906875}{462} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{138177832732241740145825}{25872} \tilde{X}^7 - \frac{495632670562260538135}{132} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{35491709462211284962181}{18816} \tilde{X}^9 - \frac{2535971792718960118862}{3675} \tilde{X}^{10} \\
& + \frac{2506975257699986189786}{13475} \tilde{X}^{11} - \frac{4508243043909594797716}{121275} \tilde{X}^{12} \\
& + \frac{240157534559701388708051}{43659000} \tilde{X}^{13} - \frac{19781048061523794848}{33075} \tilde{X}^{14} \\
& + \frac{862858856024555918}{18375} \tilde{X}^{15} - \frac{12192096970182662}{4725} \tilde{X}^{16} \\
& \left. + \frac{273007116849057223}{2910600} \tilde{X}^{17} - \frac{6612931784476618}{3274425} \tilde{X}^{18} + \frac{496561443759988}{25540515} \tilde{X}^{19} \right) \\
& + \tilde{S}^6 \left( -\frac{464289350412196235}{112} + \frac{570711270919885243}{5} \tilde{X} - \frac{165544684864930696397}{154} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{90964769388306905769737}{18480} \tilde{X}^3 - \frac{95037989344765108713125}{7392} \tilde{X}^4 \\
& + \frac{1087408173772905811120775}{51744} \tilde{X}^5 - \frac{45178300587998397704867}{1980} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{332413566023382701355877}{19404} \tilde{X}^7 - \frac{443371338418024792294021}{48510} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{57029433911114866899557}{16170} \tilde{X}^9 - \frac{120549106484669676255448}{121275} \tilde{X}^{10} \\
& \left. + \frac{101761179300058873213586}{496125} \tilde{X}^{11} - \frac{48536219942065003676}{1575} \tilde{X}^{12} \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{15684653827129531841}{4725} \tilde{X}^{13} - \frac{24687188486575088678}{99225} \tilde{X}^{14} \\
& + \frac{13402382528930355647}{1091475} \tilde{X}^{15} - \frac{111525585134660881}{311850} \tilde{X}^{16} + \frac{395299246809670547}{85135050} \tilde{X}^{17} \Big) \\
+ \tilde{S}^8 & \left( -\frac{76595301952430620721}{1232} + \frac{69918415625495074401433}{73920} \tilde{X} \right. \\
& - \frac{10129860730560056455625}{1848} \tilde{X}^2 + \frac{1717444616982354742673425}{103488} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{451387350615071614559}{15} \tilde{X}^4 + \frac{3651452870521042447701053}{103488} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{680427479927572627949926}{24255} \tilde{X}^6 + \frac{252045450877008778684183}{16170} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{149475405031843508092094}{24255} \tilde{X}^8 + \frac{3815575476816178205373487}{2182950} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{559372670129063474464}{1575} \tilde{X}^{10} + \frac{804287854334958455171}{15750} \tilde{X}^{11} \\
& - \frac{10235428936146118462}{2025} \tilde{X}^{12} + \frac{50915557963248163852}{155925} \tilde{X}^{13} \\
& \left. - \frac{2697658069891053532}{218295} \tilde{X}^{14} + \frac{8820521016380855371}{42567525} \tilde{X}^{15} \right) \\
+ \tilde{S}^{10} & \left( -\frac{791019749668550006875}{3696} + \frac{54684335426536136164675}{25872} \tilde{X} \right. \\
& - \frac{110139789857383642863653}{13200} \tilde{X}^2 + \frac{18389253515088734121024421}{1034880} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{84972400828007531176369}{3675} \tilde{X}^4 + \frac{264755493455644502540038}{13475} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{1373881225904366710466578}{121275} \tilde{X}^6 + \frac{2244618067431649501723931}{496125} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{850591920089199136112}{675} \tilde{X}^8 + \frac{638323875486879917308}{2625} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{214374652598823086429}{6750} \tilde{X}^{10} + \frac{792974555569633788269}{297000} \tilde{X}^{11} \\
& \left. - \frac{101340488710467827698}{779625} \tilde{X}^{12} + \frac{6495042153943108697}{2338875} \tilde{X}^{13} \right) \\
+ \tilde{S}^{12} & \left( -\frac{2323304732996141458159}{9900} + \frac{9994544947918292017876289}{6209280} \tilde{X} \right. \\
& - \frac{545794981436755061018554}{121275} \tilde{X}^2 + \frac{554100795570125499148273}{80850} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{70323972600708613626236}{11025} \tilde{X}^4 + \frac{41924739861304629914696729}{10914750} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{1453116169370012885056}{945} \tilde{X}^6 + \frac{1389228836155342241744}{3375} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{1028673654810167033188}{14175} \tilde{X}^8 + \frac{2872525135739803987921}{356400} \tilde{X}^9 \\
& \left. - \frac{56739639943102900592}{111375} \tilde{X}^{10} + \frac{847071322368712273799}{60810750} \tilde{X}^{11} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{S}^{14} \left( -\frac{46333597299146409818201}{485100} + \frac{75041262127791090797293}{161700} \tilde{X} \right. \\
& - \frac{111482922707591939968654}{121275} \tilde{X}^2 + \frac{5361143687674816604521558}{5457375} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{2309684901871807898768}{3675} \tilde{X}^4 + \frac{13841763617920914109516}{55125} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{6247711370432383620368}{99225} \tilde{X}^6 + \frac{10475514606818641584242}{1091475} \tilde{X}^7 \\
& \left. - \frac{3536318451369159685891}{4365900} \tilde{X}^8 + \frac{985287925995036150079}{34054020} \tilde{X}^9 \right) \\
& + \tilde{S}^{16} \left( -\frac{1848691576254451860097}{121275} + \frac{1126491963605120582390911}{21829500} \tilde{X} \right. \\
& - \frac{2307063109644366794864}{33075} \tilde{X}^2 + \frac{12026555134361815961}{245} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{645719057361593389154}{33075} \tilde{X}^4 + \frac{916250285021729060537}{207900} \tilde{X}^5 \\
& \left. - \frac{81840197248656023962}{155925} \tilde{X}^6 + \frac{8692250878034489195497}{340540200} \tilde{X}^7 \right) \\
& + \tilde{S}^{18} \left( -\frac{92147627338910490248}{99225} + \frac{1021307628105163683406}{496125} \tilde{X} \right. \\
& - \frac{73134939480036212483}{42525} \tilde{X}^2 + \frac{8904544408495470286997}{13097700} \tilde{X}^3 \\
& \left. - \frac{83597711386408585033}{654885} \tilde{X}^4 + \frac{1166977249498219845157}{127702575} \tilde{X}^5 \right) \\
& + \tilde{S}^{20} \left( -\frac{27963794133120522074}{1488375} + \frac{3050009135368325181673}{130977000} \tilde{X} \right. \\
& \left. - \frac{21381758576937593158}{2338875} \tilde{X}^2 + \frac{728285122468077990602}{638512875} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{22} \left( -\frac{2731609908191035811}{32744250} + \frac{41515492371927341743}{1277025750} \tilde{X} \right)
\end{aligned} \tag{B.56}$$

# 付録C 運動学的スニャエフ・ゼルビッチ効果の詳細な計算

## C.1 ボルツマン方程式の計算

計算する上での設定

1. 銀河団内の電子ガスは非常に希薄 ( $\sim 10^{-3} \text{cm}^{-3}$ ) であるため、一回散乱についてのみ考える。
2. 銀河団内の電子ガスは等温・均一に分布していると仮定する。
3. 銀河団内の電子の縮退は無視している。
4. 添え字「C」は、銀河団系の量であることを表す
5. 「'」は、散乱後の終状態であることを表す。
6. 自然単位系 ( $c = 1, \hbar = 1$ ) を用いている。

### C.1.1 数値積分

ここでは、ボルツマン方程式の数値積分計算について記述する。銀河団の中心に座標の原点を置き、光子の分布関数  $n(\omega)$  に対するボルツマン方程式を記述すると、

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W \{n(\omega) [1 + n(\omega')] f_C(E_C) - n(\omega') [1 + n(\omega)] f_C(E'_C)\} \quad (\text{C.1})$$

$$W = \frac{(e^2/4\pi)^2 \bar{X} \delta^4(p + k - p' - k')}{2\omega\omega' E E'} \quad (\text{C.2})$$

$$\bar{X} = -\left(\frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa}\right) + 4m^4 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'}\right)^2 - 4m^2 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'}\right) \quad (\text{C.3})$$

$$\kappa = -2(p \cdot k) = -2\omega E \left(1 - \frac{|\vec{p}|}{E} \cos \alpha\right) \quad (\text{C.4})$$

$$\kappa' = 2(p \cdot k') = 2\omega' E \left(1 - \frac{|\vec{p}'|}{E} \cos \alpha'\right) \quad (\text{C.5})$$

ここで、 $W$  は、コンプトン散乱の遷移確率を表している。(C.1) 式は、電子との散乱で、周波数が  $\omega \rightarrow \omega'$  と変化する光子から、 $\omega' \rightarrow \omega$  と変化する光子を差し引いている形で表されている。

散乱前後での電子及び光子の4元運動量をそれぞれ、

$$p = (E, \vec{p}) \quad (\text{C.6})$$

$$k = (\omega, \vec{k}) \quad (\text{C.7})$$

$$p' = (E', \vec{p}') \quad (\text{C.8})$$

$$k' = (\omega', \vec{k}') \quad (\text{C.9})$$

と表せる。

入射光子の伝播方向を  $z$  軸の正方向にとると、

$$\vec{p} = p (\sin \theta_p \cos \phi_p, \sin \theta_p \sin \phi_p, \cos \theta_p) \quad (\text{C.10})$$

$$\vec{k} = \omega (0, 0, 1) \quad (\text{C.11})$$

$$\vec{p}' = p' (\sin \theta_{p'} \cos \phi_{p'}, \sin \theta_{p'} \sin \phi_{p'}, \cos \theta_{p'}) \quad (\text{C.12})$$

$$\vec{k}' = \omega' (\sin \theta_{\gamma'} \cos \phi_{\gamma'}, \sin \theta_{\gamma'} \sin \phi_{\gamma'}, \cos \theta_{\gamma'}) \quad (\text{C.13})$$

$\theta_p$  :  $\vec{p}$  と  $\vec{k}$  のなす角度

$\theta_{p'}$  :  $\vec{p}'$  と  $\vec{k}$  のなす角度

$\theta_{\gamma'}$  :  $\vec{k}'$  と  $\vec{k}$  のなす角度

$\theta'_p$  :  $\vec{p}$  と  $\vec{k}'$  のなす角度

$$\cos \theta'_p = \cos \theta_p \cos \theta_{\gamma'} + \sin \theta_p \sin \theta_{\gamma'} \cos (\phi_p - \phi_{\gamma'}) \quad (\text{C.14})$$

である。(C.4)、(aeq:kkpp) 式において、 $\alpha \equiv \theta_p$ 、 $\alpha' \equiv \theta'_p$  である。

銀河団座標系で考えた散乱前後での電子の分布関数及び運動エネルギーは、

$$f_C(E_C) = e^{-(E_C - m)/k_B T_e} e^{(\mu_C - m)/k_B T_e} \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} f_C(E'_C) &= e^{-(E'_C - m)/k_B T_e} e^{(\mu_C - m)/k_B T_e} \\ &= f_C(E_C) e^{(E_C - E'_C)/k_B T_e} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$E_C = \gamma (E - \vec{\beta} \cdot \vec{p}) \quad (\text{C.17})$$

$$E'_C = \gamma (E' - \vec{\beta} \cdot \vec{p}') \quad (\text{C.18})$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{C.19})$$

である。ここで、銀河団の固有速度  $\vec{\beta}$  は、 $x$ - $z$  平面に速度ベクトルを置くと、

$$\begin{aligned} \vec{\beta} &\equiv \vec{v}/c \\ &= (\beta_x, 0, \beta_z) \\ &= \beta (\sin \theta_\gamma, 0, \cos \theta_\gamma) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

である。

電子の温度で無次元化した宇宙背景放射の周波数として、

$$x \equiv \frac{\hbar \omega}{k_B T_e} = \frac{\omega}{k_B T_e} \quad (\text{C.21})$$

$$\Delta x \equiv \frac{\omega' - \omega}{k_B T_e} \quad (\text{C.22})$$

と定義する。散乱前後での運動エネルギーと運動量の保存により、

$$\begin{cases} E + \omega &= E' + \omega' \\ \vec{p} + \vec{k} &= \vec{p}' + \vec{k}' \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

であることを用いると、

$$\begin{aligned} E_C - E'_C &= \gamma \left( E - \vec{\beta} \cdot \vec{p} - E' + \vec{\beta} \cdot \vec{p}' \right) \\ &= \gamma \left[ E - \vec{\beta} \cdot \vec{p} - (E + \omega - \omega') + \vec{\beta} \cdot (\vec{p} + \vec{k} - \vec{k}') \right] \\ &= \gamma \left[ \omega' - \omega + \vec{\beta} \cdot (\omega \hat{k} - \omega' \hat{k}') \right] \\ &= \gamma \left\{ \omega' - \omega + \vec{\beta} \cdot [(\omega - \omega') \hat{k}' + \omega (\hat{k} - \hat{k}')] \right\} \\ &= \gamma k_B T_e \left[ \Delta x (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}') + x \vec{\beta} \cdot (\hat{k} - \hat{k}') \right] \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

$$e^{(E_C - E'_C)/k_B T_e} = e^{\Delta x \gamma (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}')} e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{k} - \hat{k}')} \quad (\text{C.25})$$

となる。(C.16) と (C.25) を用いて、(C.1) 式を変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_C(E_C) \\ &\quad \times \left\{ n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}')} e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{k} - \hat{k}')} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

となる。そして、(C.2) 式の  $W$  を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p' d^3 k' \bar{X}}{2\omega \omega' E E'} \delta^4(p + k - p' - k') f_C(E_C) \\ &\quad \times \left\{ n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}')} e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{k} - \hat{k}')} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

を得る。ここで、 $\delta$  関数の部分について、

$$\frac{d^3 p'}{2E'} = \int_0^\infty dp'_0 \delta(p'_\mu p'^\mu - m^2) d^3 p' \quad (\text{C.28})$$

という関係式を適用すると、

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 p'}{2E'} \delta^4(p + k - p' - k') &= \int_0^\infty d^4 p' \delta(p'_\mu p'^\mu - m^2) \delta^4(p + k - p' - k') \\ &= \delta(p'^2 - m^2) \Big|_{p'=p+k-k'} \\ &= \delta \left[ (p + k - k')^2 - m^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

となる。また、自然単位系を用いているから、

$$\begin{aligned} d^3 k' &= k'^2 dk' d\Omega_{k'} \\ &= \omega'^2 d\omega' d\Omega_{k'} \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

であるので、(C.27) 式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E\omega} \int d\Omega_{k'} \int d\omega' \omega' \delta \left[ (p+k-k')^2 - m^2 \right] f_C(E_C) \bar{X} \\ &\quad \times \left\{ n(\omega) [1+n(\omega')] - n(\omega') [1+n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1-\vec{\beta} \cdot \hat{k}')} e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{k}-\hat{k}')} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

と変形できる。

$\vec{p}$  と  $\vec{k}$ ,  $\vec{p}$  と  $\vec{k}'$ ,  $\vec{k}$  と  $\vec{k}'$  のなす角度はそれぞれ  $\theta_p$ ,  $\theta_p'$ ,  $\theta_{\gamma'}$  であるから、

$$\begin{aligned} (p+k-k')^2 - m^2 &= p \cdot p + k \cdot k + k' \cdot k' + 2p \cdot k - 2p \cdot k' - 2k \cdot k' - m^2 \\ &= E^2 - |\vec{p}|^2 + \omega^2 - |\vec{k}|^2 + \omega'^2 - |\vec{k}'|^2 + 2 \left( E\omega - |\vec{p}| |\vec{k}| \cos \theta_p \right) \\ &\quad - 2 \left( E\omega' - |\vec{p}| |\vec{k}'| \cos \theta_p' \right) - 2 \left( \omega\omega' - |\vec{k}| |\vec{k}'| \cos \theta_{\gamma'} \right) - m^2 \\ &= E^2 - (p^2 + m^2) + 2\omega (E - p \cos \theta_p) \\ &\quad - 2\omega' (E - p \cos \theta_p') - 2\omega\omega' (1 - \cos \theta_{\gamma'}) \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

となる。ここで、 $E = \sqrt{p^2 + m^2}$  を用いると、

$$(p+k-k')^2 - m^2 = 2\omega (E - p \cos \theta_p) - 2\omega' [E + \omega (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta_p'] \quad (\text{C.33})$$

が得られる。

また、以下の関係式、

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x), \quad |c| \neq 0 \quad (\text{C.34})$$

を用いて、

$$\begin{aligned} &\delta \left[ (p+k-k')^2 - m^2 \right] \\ &= \delta \left\{ -2 [E + \omega (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta_p'] \left[ \omega' - \frac{\omega (E - p \cos \theta_p)}{E + \omega (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta_p'} \right] \right\} \\ &= \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{E + \omega (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta_p'} \right| \delta \left[ \omega' - \frac{\omega (E - p \cos \theta_p)}{E + \omega (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta_p'} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{E + \omega (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta_p'} \delta \left[ \omega' - \frac{\omega (E - p \cos \theta_p)}{E + \omega (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta_p'} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= - \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} \int d\Omega_{k'} \frac{\omega'}{\omega} \frac{1}{E + \omega (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta_p'} f_C(E_C) \bar{X} \\ &\quad \times \left\{ n(\omega) [1+n(\omega')] - n(\omega') [1+n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1-\vec{\beta} \cdot \hat{k}')} e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{k}-\hat{k}')} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

$$\omega' = \frac{\omega (E - p \cos \theta_p)}{E + \omega (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - p \cos \theta_p'} \quad (\text{C.37})$$

である。積分変数を具体的に表すと、

$$\int d^3p \int d\Omega_{k'} = \int_0^\infty dp p^2 \int_0^\pi d\theta_p \sin\theta_p \int_0^{2\pi} d\phi_p \int_0^\pi d\theta_{\gamma'} \sin\theta_{\gamma'} \int_0^{2\pi} d\phi_{\gamma'} \quad (\text{C.38})$$

である。そして、トムソン散乱断面積は、

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{4\pi m} \right)^2 \quad (\text{C.39})$$

であるから、

$$\left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 = \sigma_T \frac{3}{8\pi} m^2 \quad (\text{C.40})$$

である。これらを用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -\sigma_T \frac{3}{8\pi} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp p^2 \left( \frac{m}{E} \right)^2 f_C(E_C) \\ &\times \int_0^\pi d\theta_p \sin\theta_p \int_0^\pi d\theta_{\gamma'} \sin\theta_{\gamma'} \int_0^{2\pi} d\phi_p \int_0^{2\pi} d\phi_{\gamma'} \\ &\times \frac{\omega'}{\omega} \frac{1}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos\theta_{\gamma'}) - \frac{\omega}{E} \cos\theta'_p} \\ &\times \left\{ n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}')} e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{k} - \hat{k}')} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

となる。C.1.3 より、

$$f_C(E_C) = N_e \frac{\pi^2}{m^3} \theta_e^{-\frac{3}{2}} g(\theta_e) e^{-(E_C - m)/k_B T_e} \quad (\text{C.42})$$

C.1.3 と同様に、 $p = \sqrt{E^2 + m^2}$ ,  $K \equiv E - m$  と定義し、 $u \equiv K/k_B T_e$  への変数変換を行うと、

$$\begin{aligned} dp p^2 &= dK (K + m) \sqrt{K(K + 2m)} \\ &= m^3 \frac{k_B T_e}{m} du \left( \frac{k_B T_e}{m} u + 1 \right) \sqrt{\frac{k_B T_e}{m} u \left( \frac{k_B T_e}{m} u + 2 \right)} \\ &= m^3 \theta_e^{\frac{3}{2}} du (\theta_e u + 1) \sqrt{u (\theta_e u + 2)} \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

$$\begin{aligned} e^{-(E_C - m)/k_B T_e} &= e^{-[\gamma(E - \vec{\beta} \cdot \hat{p}) - m]/k_B T_e} \\ &= e^{-[\gamma(E - m) - \gamma m \frac{p}{m} \vec{\beta} \cdot \hat{p} + m(\gamma - 1)]/k_B T_e} \\ &= e^{-\gamma u} e^{\frac{\gamma}{\theta_e} \frac{p}{m} \vec{\beta} \cdot \hat{p}} e^{-\frac{\gamma - 1}{\theta_e}} \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

(C.42) ~ (C.44) 式より、

$$\begin{aligned} dp p^2 f_C(E_C) &= N_e \pi^2 g(\theta_e) du (\theta_e u + 1) \sqrt{u (\theta_e u + 2)} \\ &\times e^{-\gamma u} e^{\frac{\gamma}{\theta_e} \frac{p}{m} \vec{\beta} \cdot \hat{p}} e^{-\frac{\gamma - 1}{\theta_e}} \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

となるので、最終的には、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -\frac{3}{4}\sigma_T N_e g(\theta_e) \int_0^\infty du (\theta_e u + 1) \sqrt{u(\theta_e u + 2)} \\
&\times \left(\frac{m}{E}\right)^2 e^{-\gamma u} e^{\frac{\gamma}{\theta_e} \frac{p}{m} \beta \cdot \hat{p}} e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}} \\
&\times \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_p \sin \theta_p \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_{\gamma'} \sin \theta_{\gamma'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_p \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_{\gamma'} \\
&\times \frac{\omega'}{\omega} \frac{\bar{X}}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \\
&\times \left\{ n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1 - \beta \cdot \hat{k}')} e^{x \gamma \beta \cdot (\hat{k} - \hat{k}')} \right\} \quad (C.46)
\end{aligned}$$

$$\frac{m}{E} = \frac{m}{K + m} = \frac{1}{\theta_e u + 1} \quad (C.47)$$

$$\frac{p}{m} = \frac{\sqrt{K(K + 2m)}}{m} = \sqrt{\theta_e u (\theta_e u + 2)} \quad (C.48)$$

$$\frac{p}{E} = \frac{\sqrt{K(K + 2m)}}{K + m} = \frac{\sqrt{\theta_e u (\theta_e u + 2)}}{\theta_e u + 1} \quad (C.49)$$

$$\frac{\omega}{E} = \frac{x k_B T_e}{E} = x \frac{k_B T_e}{m} \frac{m}{E} = \frac{x \theta_e}{\theta_e u + 1} \quad (C.50)$$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \quad (C.51)$$

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \frac{\omega}{k_B T_e} \left( \frac{\omega'}{\omega} - 1 \right) \\
&= -x \frac{\frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) + \frac{p}{E} (\cos \theta_p - \cos \theta'_p)}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \quad (C.52)
\end{aligned}$$

$$\bar{X} = -\left( \frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa} \right) + \left\{ 2m^2 \left( \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'} \right) \right\}^2 - 2 \left\{ 2m^2 \left( \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'} \right) \right\} \quad (C.53)$$

と得られる。ここで、

$$\kappa = -2\omega E \left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p \right) \quad (C.54)$$

$$\kappa' = 2\omega' E \left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right) \quad (C.55)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa}{\kappa'} &= -\frac{\omega}{\omega'} \frac{1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p}{1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \\
&= -\frac{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p}{1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \quad (C.56)
\end{aligned}$$

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = -\frac{1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \quad (C.57)$$

であることから、

$$-\left( \frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa} \right) = \frac{\left[ 1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right]^2 + \left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right)^2}{\left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right) \left[ 1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right]}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\left\{ \left[ 1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right] - \left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right) \right\}^2}{\left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right) \left[ 1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right]} \\
&+ \frac{2 \left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right) \left[ 1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right]}{\left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right) \left[ 1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right]} \\
&= \left( \frac{\omega}{E} \right)^2 \frac{(1 - \cos \theta_{\gamma'})^2}{\left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right) \left[ 1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right]} + 2 \\
&= x^2 \theta_e^2 \left( \frac{m}{E} \right)^2 \frac{(1 - \cos \theta_{\gamma'})^2}{\left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right) \left[ 1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right]} + 2 \quad (\text{C.58})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2m^2 \left( \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'} \right) &= \frac{m^2}{\omega E} \left( -\frac{1}{1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p} + \frac{\omega}{\omega'} \frac{1}{1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \right) \\
&= \left( \frac{\omega}{E} \right)^{-1} \left( \frac{m}{E} \right)^2 \frac{1}{1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p} \left[ -1 + \frac{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p}{1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \right] \\
&= \left( \frac{m}{E} \right)^2 \frac{1 - \cos \theta_{\gamma'}}{\left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p \right) \left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right)} \quad (\text{C.59})
\end{aligned}$$

という計算結果を得る。

したがって、

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= 2 + \left( \frac{m}{E} \right)^4 \frac{(1 - \cos \theta_{\gamma'})^2}{\left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p \right)^2 \left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right)^2} \\
&- 2 \left( \frac{m}{E} \right)^2 \frac{1 - \cos \theta_{\gamma'}}{\left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta_p \right) \left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right)} \\
&+ x^2 \theta_e^2 \left( \frac{m}{E} \right)^2 \frac{(1 - \cos \theta_{\gamma'})^2}{\left( 1 - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right) \left[ 1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p \right]} \quad (\text{C.60})
\end{aligned}$$

と計算できる。

さて、電子の温度で規格化した無次元周波数  $x$  には、

$$x = \frac{k_B T_0}{k_B T_e} X = \frac{1}{\theta_e} \frac{k_B T_0}{mc^2} X \quad (\text{C.61})$$

$$X \equiv \frac{\omega}{k_B T_0} \quad (\text{C.62})$$

を代入する。ただし、 $T_0$  は宇宙背景放射の温度であり、 $T_0 \simeq 2.726\text{K}$  である。散乱前後の光子分布関数には、

$$n(\omega) = \frac{1}{e^X - 1} \quad (\text{C.63})$$

$$n(\omega') = \frac{1}{e^{\frac{\omega'}{\omega} X} - 1} \quad (\text{C.64})$$

を代入する。さらに、時間積分をして、

$$\Delta n(X) = \int \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} dt \quad (\text{C.65})$$

$$dt = \frac{dl}{c} = dl \quad (l: \text{銀河団内の光路長}) \quad (\text{C.66})$$

$$\tau \equiv \sigma_T \int dl N_e(l) \quad (\tau: \text{光学的深さ}) \quad (\text{C.67})$$

を得る。最後に、分布強度のずれを表す以下の式：

$$\Delta I = \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n(X)}{n_0(X)} \quad (\text{C.68})$$

$$n_0(X) \equiv \frac{1}{e^X - 1} \quad ( : \text{プランク分布関数} ) \quad (\text{C.69})$$

を計算することによって、横軸のパラメータを無次元周波数  $X$  として  $\Delta I/\tau$  をプロットすると、SZ 効果のグラフが求められる。

数値積分の際は、ガウス積分法を用いて、分点数を 98 分点として求めた。この数値積分の値は、次に行われる展開計算の値の有効性確認の際に用いられる。

### C.1.2 展開計算

ここでは、 $\theta_e \ll 1$  として、ボルツマン方程式の展開計算について記述する。C.1.1 の (C.26) 式より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W \{ n(\omega) [1 + n(\omega')] f_C(E_C) - n(\omega') [1 + n(\omega)] f_C(E'_C) \} \\ &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_C(E_C) \\ &\quad \times \left\{ n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}')} e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{k} - \hat{k}')} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

まず、 $\Delta x \equiv (\omega' - \omega) / k_B T_e \ll 1$  として、次のような流れで、フォッカー・プランク展開をする。まず、

$$\begin{aligned} n(\omega') &= n(\omega + \Delta\omega) \\ &\simeq n + \frac{\partial n}{\partial \omega} \Delta\omega + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 n}{\partial \omega^2} (\Delta\omega)^2 + \dots \\ &= n + \frac{\partial n}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \\ &= n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

$$n \equiv n(\omega) \quad (\text{C.72})$$

$$e^{\Delta x \gamma (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}')} \simeq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \gamma (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}') \right]^k (\Delta x)^k \quad (\text{C.73})$$

となることを用いて、

$$\begin{aligned} n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}')} e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{k} - \hat{k}')} \\ \simeq n \left[ 1 + n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \right] \\ - (1 + n) e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{k} - \hat{k}')} \left[ n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \right] \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \gamma (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}') \right]^k (\Delta x)^k \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n(1+n) + n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \\
&\quad - n(1+n) e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} - (1+n) e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \\
&\quad - n(1+n) e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \gamma \left( 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}' \right) \right]^k (\Delta x)^k \\
&\quad - (1+n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j n}{\partial x^j} (\Delta x)^j e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left[ \gamma \left( 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}' \right) \right]^l (\Delta x)^l \\
&= n(1+n) \left[ 1 - e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \right] + n \left[ 1 - e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \\
&\quad - e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \\
&\quad - (1+n) e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j n}{\partial x^j} (\Delta x)^j \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left[ \gamma \left( 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}' \right) \right]^l (\Delta x)^l \\
&\quad - n(1+n) e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \gamma \left( 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}' \right) \right]^k (\Delta x)^k \\
&= n(1+n) \left[ 1 - e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \right] + n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} \frac{(\Delta x)^k}{k!} \left[ 1 - e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \right] \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} \frac{(\Delta x)^k}{k!} e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(j+l)!}{j! l!} (1+n) \frac{\partial^j n}{\partial x^j} \frac{(\Delta x)^{j+l}}{(j+l)!} e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \left[ \gamma \left( 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}' \right) \right]^l \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} n(1+n) \frac{(\Delta x)^k}{k!} e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \left[ \gamma \left( 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}' \right) \right]^k \tag{C.74}
\end{aligned}$$

という計算ができる。ここで、第3項から第5項までを  $\Delta x$  の同次項でまとめるために、 $j+l=k$  とする。 $j$  に  $j=k-l$  を代入すれば、第3項から第5項は  $k$  と  $l$  についての和で表せる。そのとき、 $j \geq 1$ ,  $l \geq 1$  に注意すると、 $1 \leq l \leq k-1$  の範囲で和をとることになるから、

$$\begin{aligned}
&n(\omega) [1+n(\omega')] - n(\omega') [1+n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1-\vec{\beta}\cdot\hat{k}')} e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \\
&\simeq n \left\{ (1+n) \left[ 1 - e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} \frac{(\Delta x)^k}{k!} \left[ 1 - e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \right] \right\} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^k n}{\partial x^k} \frac{(\Delta x)^k}{k!} e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-l)! l!} (1+n) \frac{\partial^{k-l} n}{\partial x^{k-l}} \frac{(\Delta x)^k}{k!} e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \left[ \gamma \left( 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}' \right) \right]^l \right\}
\end{aligned}$$

$$+n(1+n)\frac{(\Delta x)^k}{k!}e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \left[ \gamma \left( 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}' \right) \right]^k \} \quad (\text{C.75})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_C(E_C) \\ &\quad \times \left\{ n(\omega) [1+n(\omega')] - n(\omega') [1+n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1-\vec{\beta}\cdot\hat{k}')} e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \right\} \\ &\simeq 2n \left[ (1+n)J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} J_k \right] \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial^k n}{\partial x^k} I_{k,0} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-l)! l!} (1+n) \frac{\partial^{k-l} n}{\partial x^{k-l}} I_{k,l} + n(1+n)I_{k,k} \right] \\ &= 2n \left[ (1+n)J_0 + \frac{\partial n}{\partial x} J_1 + \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} J_2 + \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} J_3 + \dots \right] \\ &\quad + 2 \left[ \frac{\partial n}{\partial x} I_{1,0} + n(1+n)I_{1,1} \right] + 2 \left[ \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} I_{2,0} + 2(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} I_{2,1} + n(1+n)I_{2,2} \right] \\ &\quad + 2 \left[ \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} I_{3,0} + 3(1+n) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} I_{3,1} + 3(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} I_{3,2} + n(1+n)I_{3,3} \right] + \dots \quad (\text{C.76}) \end{aligned}$$

このとき、

$$J_k \equiv - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_C(E_C) \frac{(\Delta x)^k}{k!} \left[ 1 - e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \right] \quad (k \geq 0) \quad (\text{C.77})$$

$$I_{k,l} \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_C(E_C) \frac{(\Delta x)^k}{k!} e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \left[ \gamma \left( 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}' \right) \right]^l \quad (k \geq 1, 0 \leq l \leq k) \quad (\text{C.78})$$

C.1.1 を参考にして、(C.77) 式と (C.78) 式を計算すると、

$$\begin{aligned} J_k &= -\frac{3}{8} \sigma_T N_e g(\theta_e) \int_0^\infty du (\theta_e u + 1) \sqrt{u(\theta_e u + 2)} \\ &\quad \times \left( \frac{m}{E} \right)^2 e^{-\gamma u} e^{\frac{\gamma}{\theta_e} \frac{p}{m} \vec{\beta} \cdot \hat{p}} e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}} \\ &\quad \times \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_p \sin \theta_p \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_{\gamma'} \sin \theta_{\gamma'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_p \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_{\gamma'} \\ &\quad \times \frac{\omega'}{\omega} \frac{\bar{X}}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \frac{(\Delta x)^k}{k!} \left[ 1 - e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \right] \quad (\text{C.79}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{k,l} &= \frac{3}{8} \sigma_T N_e g(\theta_e) \int_0^\infty du (\theta_e u + 1) \sqrt{u(\theta_e u + 2)} \\ &\quad \times \left( \frac{m}{E} \right)^2 e^{-\gamma u} e^{\frac{\gamma}{\theta_e} \frac{p}{m} \vec{\beta} \cdot \hat{p}} e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}} \\ &\quad \times \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_p \sin \theta_p \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_{\gamma'} \sin \theta_{\gamma'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_p \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_{\gamma'} \\ &\quad \times \frac{\omega'}{\omega} \frac{\bar{X}}{1 + \frac{\omega}{E} (1 - \cos \theta_{\gamma'}) - \frac{p}{E} \cos \theta'_p} \frac{(\Delta x)^k}{k!} e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \left[ \gamma \left( 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k}' \right) \right]^l \quad (\text{C.80}) \end{aligned}$$

となる。

次に、 $\beta \ll 1$  として、 $O(\beta^2)$  までの展開を計算する。

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{-2\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = \gamma^3 \beta \quad (\text{C.81})$$

$$\begin{aligned} f(\beta) &\equiv e^{-\gamma u} \\ f'(\beta) &= -\gamma^3 \beta u f(\beta) \\ f''(\beta) &= -(3\gamma^5 \beta^2 + \gamma^3) u f(\beta) + \gamma^6 \beta^2 u^2 f(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-\gamma u} &\simeq f(0) + f'(0)\beta + \frac{1}{2!} f''(0)\beta^2 \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} u \beta^2 \right) e^{-u} \end{aligned} \quad (\text{C.82})$$

$$\begin{aligned} f(\beta) &\equiv e^{\gamma \beta a} \quad , \quad a \equiv \frac{1}{\theta_e} \frac{p}{m} \hat{\beta} \cdot \hat{p} \\ f'(\beta) &= (\gamma^3 \beta^2 + \gamma) a f(\beta) \\ f''(\beta) &= (3\gamma^5 \beta^3 + 2\gamma^3 \beta + \gamma^3 \beta) a f(\beta) + (\gamma^3 \beta^2 + \gamma)^2 a^2 f(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\frac{\gamma}{\theta_e} \frac{p}{m} \hat{\beta} \cdot \hat{p}} &\simeq f(0) + f'(0)\beta + \frac{1}{2!} f''(0)\beta^2 \\ &= 1 + a\beta + \frac{1}{2} a^2 \beta^2 \\ &= 1 + \frac{1}{\theta_e} \frac{p}{m} (\hat{\beta} \cdot \hat{p}) \beta + \frac{1}{2\theta_e^2} \left( \frac{p}{m} \right)^2 (\hat{\beta} \cdot \hat{p})^2 \beta^2 \end{aligned} \quad (\text{C.83})$$

$$\begin{aligned} f(\beta) &\equiv e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}} \\ f'(\beta) &= -\frac{1}{\theta_e} \gamma^3 \beta f(\beta) \\ f''(\beta) &= -\frac{1}{\theta_e} (3\gamma^5 \beta^2 + \gamma^3) f(\beta) + \frac{1}{\theta_e^2} \gamma^6 \beta^2 f(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}} &\simeq f(0) + f'(0)\beta + \frac{1}{2!} f''(0)\beta^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2\theta_e} \beta^2 \end{aligned} \quad (\text{C.84})$$

$$e^{-\gamma u} e^{\frac{\gamma}{\theta_e} \frac{p}{m} \hat{\beta} \cdot \hat{p}} e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}}$$

$$\simeq e^{-u} \left[ 1 + \frac{1}{\theta_e} \frac{p}{m} (\hat{\beta} \cdot \hat{p}) \beta - \frac{1}{2} u \beta^2 + \frac{1}{2\theta_e^2} \left( \frac{p}{m} \right)^2 (\hat{\beta} \cdot \hat{p})^2 \beta^2 - \frac{1}{2\theta_e} \beta^2 \right] \quad (\text{C.85})$$

$$\begin{aligned}
e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} &\equiv e^{\gamma\beta a} \quad \left( a \equiv x\hat{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}') \right) \\
&\simeq 1 + a\beta + \frac{1}{2}a^2\beta^2 \\
&= 1 + x \left[ \hat{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}') \right] \beta + \frac{1}{2}x^2 \left[ \hat{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}') \right]^2 \beta^2
\end{aligned} \tag{C.86}$$

よって、(C.77) 式において、

$$1 - e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \simeq -x \left[ \hat{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}') \right] \beta - \frac{1}{2}x^2 \left[ \hat{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}') \right]^2 \beta^2 \tag{C.87}$$

$$\begin{aligned}
&e^{-\gamma u} e^{\frac{\gamma}{\theta_e} \frac{p}{m} \vec{\beta}\cdot\hat{p}} e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}} \left[ 1 - e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \right] \\
&\simeq e^{-u} \left\{ -x \left[ \hat{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}') \right] \beta - \frac{1}{2}x^2 \left[ \hat{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}') \right]^2 \beta^2 - \frac{x}{\theta_e} \frac{p}{m} (\hat{\beta}\cdot\hat{p}) \left[ \hat{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}') \right] \beta^2 \right\}
\end{aligned} \tag{C.88}$$

と計算できる。そして、(C.78) 式において、

$$\begin{aligned}
f(\beta) &\equiv [\gamma(1-\beta a)]^l, \quad a \equiv \hat{\beta}\cdot\hat{k}' \\
f'(\beta) &= l [\gamma^3\beta(1-\beta a) - \gamma a] [\gamma(1-\beta a)]^{l-1} \\
f''(\beta) &= l [(3\gamma^5\beta^2 + \gamma^3)(1-\beta a) - 2\gamma^3\beta a] [\gamma(1-\beta a)]^{l-1} \\
&\quad + l(l-1) [\gamma^3\beta(1-\beta a) - \gamma a]^2 [\gamma(1-\beta a)]^{l-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \gamma(1-\vec{\beta}\cdot\hat{k}') \right]^l &\simeq f(0) + f'(0)\beta + \frac{1}{2!}f''(0)\beta^2 \\
&= 1 - l a \beta + \frac{1}{2}l\beta^2 + \frac{1}{2}l(l-1)a^2\beta^2 \\
&= 1 - l (\hat{\beta}\cdot\hat{k}') \beta + \frac{1}{2}l\beta^2 + \frac{1}{2}l(l-1) (\hat{\beta}\cdot\hat{k}')^2 \beta^2
\end{aligned} \tag{C.89}$$

$$\begin{aligned}
&e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \left[ \gamma(1-\vec{\beta}\cdot\hat{k}') \right]^l \\
&\simeq 1 + x \left[ \hat{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}') \right] \beta - l (\hat{\beta}\cdot\hat{k}') \beta \\
&\quad + \frac{1}{2}x^2 \left[ \hat{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}') \right]^2 \beta^2 + \frac{1}{2}l\beta^2 + \frac{1}{2}l(l-1) (\hat{\beta}\cdot\hat{k}')^2 \beta^2 - l x \left[ \hat{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}') \right] (\hat{\beta}\cdot\hat{k}') \beta^2
\end{aligned} \tag{C.90}$$

$$e^{-\gamma u} e^{\frac{\gamma}{\theta_e} \frac{p}{m} \vec{\beta}\cdot\hat{p}} e^{-\frac{\gamma-1}{\theta_e}} e^{x\gamma\vec{\beta}\cdot(\hat{k}-\hat{k}')} \left[ \gamma(1-\vec{\beta}\cdot\hat{k}') \right]^l$$

$$\begin{aligned}
&\simeq e^{-u} \left\{ 1 + \frac{1}{\theta_e} \frac{p}{m} (\hat{\beta} \cdot \hat{p}) \beta + x \left[ \hat{\beta} \cdot (\hat{k} - \hat{k}') \right] \beta - l (\hat{\beta} \cdot \hat{k}') \beta \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} u \beta^2 + \frac{1}{2\theta_e^2} \left( \frac{p}{m} \right)^2 (\hat{\beta} \cdot \hat{p})^2 \beta^2 - \frac{1}{2\theta_e} \beta^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} x^2 \left[ \hat{\beta} \cdot (\hat{k} - \hat{k}') \right]^2 \beta^2 + \frac{1}{2} l \beta^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} l(l-1) (\hat{\beta} \cdot \hat{k}')^2 \beta^2 - lx \left[ \hat{\beta} \cdot (\hat{k} - \hat{k}') \right] (\hat{\beta} \cdot \hat{k}') \beta^2 \\
&\quad \left. + \frac{x}{\theta_e} \frac{p}{m} (\hat{\beta} \cdot \hat{p}) \left[ \hat{\beta} \cdot (\hat{k} - \hat{k}') \right] \beta^2 - \frac{l}{\theta_e} \frac{p}{m} (\hat{\beta} \cdot \hat{p}) (\hat{\beta} \cdot \hat{k}') \beta^2 \right\} \quad (C.91)
\end{aligned}$$

と計算できる。

これらを踏まえたうえで、(C.77) 式と (C.78) 式について  $O(\theta_e^5)$ 、 $O(\beta\theta_e^4)$  及び、 $O(\beta^2\theta_e^3)$  まで展開計算を行い、

$$\begin{aligned}
x &= \frac{T_0}{T_e} \frac{\omega}{k_B T_0} \\
&= \frac{T_0}{T_e} X \quad (C.92)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{T_e}{T_0} \frac{\partial}{\partial X} \quad (C.93)$$

を代入する。その後、 $T_e \sim 10^8 \text{K}$  と  $T_0 \simeq 2.726 \text{K}$  の比のオーダーから、 $\frac{T_0}{T_e} \rightarrow 0$  とする。さらに、時間積分をして、

$$\Delta n(X) = \int \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} dt \quad (C.94)$$

$$dt = \frac{dl}{c} = dl \quad (l : \text{銀河団内の光路長}) \quad (C.95)$$

$$\tau \equiv \sigma_T \int dl N_e(l) \quad (\tau : \text{光学的深さ}) \quad (C.96)$$

を得るから、

$$\begin{aligned}
\Delta n(X) &= \frac{\tau X e^X}{(e^X - 1)^2} \theta_e (Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4) \\
&\quad + \frac{\tau X e^X}{(e^X - 1)^2} \beta^2 (B_0 + \theta_e B_1 + \theta_e^2 B_2 + \theta_e^3 B_3) \\
&\quad + \frac{\tau X e^X}{(e^X - 1)^2} \beta P_1(\hat{\beta}_z) (C_0 + \theta_e C_1 + \theta_e^2 C_2 + \theta_e^3 C_3 + \theta_e^4 C_4) \\
&\quad + \frac{\tau X e^X}{(e^X - 1)^2} \beta^2 P_2(\hat{\beta}_z) (D_0 + \theta_e D_1 + \theta_e^2 D_2 + \theta_e^3 D_3) \quad (C.97)
\end{aligned}$$

という結果が得られる。ここで、 $B_0 \sim B_3$ 、 $C_0 \sim C_4$ 、 $D_0 \sim D_3$ 、までの項については、

$$B_0 = \frac{1}{3} Y_0 \quad (C.98)$$

$$B_1 = \frac{5}{6} Y_0 + \frac{2}{3} Y_1 \quad (C.99)$$

$$B_2 = \frac{5}{8}Y_0 + \frac{3}{2}Y_1 + Y_2 \quad (\text{C.100})$$

$$B_3 = -\frac{5}{8}Y_0 + \frac{5}{4}Y_1 + \frac{5}{2}Y_2 + \frac{4}{3}Y_3 \quad (\text{C.101})$$

$$C_0 = 1 \quad (\text{C.102})$$

$$C_1 = 10 - \frac{47}{5}\tilde{X} + \frac{7}{5}\tilde{X}^2 + \frac{7}{10}\tilde{S}^2 \quad (\text{C.103})$$

$$\begin{aligned} C_2 &= 25 - \frac{1117}{10}\tilde{X} + \frac{847}{10}\tilde{X}^2 - \frac{183}{10}\tilde{X}^3 + \frac{11}{10}\tilde{X}^4 \\ &+ \tilde{S}^2 \left( \frac{847}{20} - \frac{183}{5}\tilde{X} + \frac{121}{20}\tilde{X}^2 \right) + \frac{11}{10}\tilde{S}^4 \end{aligned} \quad (\text{C.104})$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{75}{4} - \frac{21873}{40}\tilde{X} + \frac{49161}{40}\tilde{X}^2 - \frac{27519}{35}\tilde{X}^3 + \frac{6684}{35}\tilde{X}^4 \\ &- \frac{3917}{210}\tilde{X}^5 + \frac{64}{105}\tilde{X}^6 \\ &+ \tilde{S}^2 \left( \frac{49161}{80} - \frac{55038}{35}\tilde{X} + \frac{36762}{35}\tilde{X}^2 - \frac{50921}{210}\tilde{X}^3 + \frac{608}{35}\tilde{X}^4 \right) \\ &+ \tilde{S}^4 \left( \frac{6684}{35} - \frac{66589}{420}\tilde{X} + \frac{192}{7}\tilde{X}^2 \right) \\ &+ \frac{272}{105}\tilde{S}^6 \end{aligned} \quad (\text{C.105})$$

$$\begin{aligned} C_4 &= -\frac{75}{4} - \frac{10443}{8}\tilde{X} + \frac{359079}{40}\tilde{X}^2 - \frac{938811}{70}\tilde{X}^3 + \frac{261714}{35}\tilde{X}^4 \\ &- \frac{263259}{140}\tilde{X}^5 + \frac{4772}{21}\tilde{X}^6 - \frac{1336}{105}\tilde{X}^7 + \frac{11}{42}\tilde{X}^8 \\ &+ \tilde{S}^2 \left( \frac{359079}{80} - \frac{938811}{35}\tilde{X} + \frac{1439427}{35}\tilde{X}^2 - \frac{3422367}{140}\tilde{X}^3 + \frac{45334}{7}\tilde{X}^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{5344}{7}\tilde{X}^5 + \frac{2717}{84}\tilde{X}^6 \right) \\ &+ \tilde{S}^4 \left( \frac{261714}{35} - \frac{4475403}{280}\tilde{X} + \frac{71580}{7}\tilde{X}^2 - \frac{85504}{35}\tilde{X}^3 + \frac{1331}{7}\tilde{X}^4 \right) \\ &+ \tilde{S}^6 \left( \frac{20281}{21} - \frac{82832}{105}\tilde{X} + \frac{2948}{21}\tilde{X}^2 \right) \\ &+ \frac{341}{42}\tilde{S}^8 \end{aligned} \quad (\text{C.106})$$

$$D_0 = -\frac{2}{3} + \frac{11}{30}\tilde{X} \quad (\text{C.107})$$



$$D_1 = -4 + 12\tilde{X} - 6\tilde{X}^2 + \frac{19}{30}\tilde{X}^3 + \tilde{S}^2 \left( -3 + \frac{19}{15}\tilde{X} \right) \quad (\text{C.108})$$

$$\begin{aligned} D_2 &= -10 + \frac{542}{5}\tilde{X} - \frac{843}{5}\tilde{X}^2 + \frac{10603}{140}\tilde{X}^3 - \frac{409}{35}\tilde{X}^4 + \frac{23}{42}\tilde{X}^5 \\ &+ \tilde{S}^2 \left( -\frac{843}{10} + \frac{10603}{70}\tilde{X} - \frac{4499}{70}\tilde{X}^2 + \frac{299}{42}\tilde{X}^3 \right) \\ &+ \tilde{S}^4 \left( -\frac{409}{35} + \frac{391}{84}\tilde{X} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.109})$$

$$\begin{aligned} D_3 &= -\frac{15}{2} + \frac{4929}{10}\tilde{X} - \frac{39777}{20}\tilde{X}^2 + \frac{1199897}{560}\tilde{X}^3 - \frac{4392}{5}\tilde{X}^4 \\ &+ \frac{16364}{105}\tilde{X}^5 - \frac{3764}{315}\tilde{X}^6 + \frac{101}{315}\tilde{X}^7 \\ &+ \tilde{S}^2 \left( -\frac{39777}{40} + \frac{1199897}{280}\tilde{X} - \frac{24156}{5}\tilde{X}^2 + \frac{212732}{105}\tilde{X}^3 - \frac{35758}{105}\tilde{X}^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{404}{21}\tilde{X}^5 \right) \\ &+ \tilde{S}^4 \left( -\frac{4392}{5} + \frac{139094}{105}\tilde{X} - \frac{3764}{7}\tilde{X}^2 + \frac{6464}{105}\tilde{X}^3 \right) \\ &+ \tilde{S}^6 \left( -\frac{15997}{315} + \frac{6262}{315}\tilde{X} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.110})$$

という計算結果が得られる。ただし、

$$\tilde{X} \equiv X \coth \left( \frac{X}{2} \right) \quad (\text{C.111})$$

$$\tilde{S} \equiv \frac{X}{\sinh(X/2)} \quad (\text{C.112})$$

である。

### C.1.3 化学ポテンシャルを含む項

ここでは、電子分布関数中の化学ポテンシャルを含む項を、電子数密度を用いて表す計算について記述する。電子の縮退を無視し、電子の分布関数に対して相対論的マックスウェル分布を仮定する。電子が温度  $T_e$  を持つとすると、

$$\begin{aligned} f_C(E_C) &= \left\{ e^{[(E_C - m) - (\mu_C - m)]/k_B T_e} + 1 \right\}^{-1} \\ &\approx e^{-(E_C - m)/k_B T_e} e^{(\mu_C - m)/k_B T_e} \end{aligned} \quad (\text{C.113})$$

ただし、それぞれ

$$\begin{cases} E_C &: \text{電子の静止エネルギーを含めた全エネルギー} \\ m &: \text{電子の静止エネルギー} \\ \mu_C &: \text{電子の静止エネルギーを含めた化学ポテンシャル} \end{cases}$$

である。

電子の非相対論的な運動エネルギーとして、 $K_C \equiv (E_C - m)$  と定義する。電子の数密度を  $N_e$  とおくと、

$$\begin{aligned}
 N_e &= 2 \int_0^\infty \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3} f_C(E_C) \\
 &= 2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi_{p_C} \int_0^\pi d\theta_{p_C} \sin \theta_{p_C} \int_0^\infty dp_C p_C^2 f_C(E_C) \\
 &= \frac{1}{\pi^2} e^{(\mu_C - m)/k_B T_e} \int_0^\infty dp_C p_C^2 e^{-K_C/k_B T_e}
 \end{aligned} \tag{C.114}$$

さて、全エネルギー  $E_C = \sqrt{p_C^2 + m^2}$  と運動エネルギー  $K_C = E_C - m$  から、

$$\begin{aligned}
 p_C^2 &= E_C^2 - m^2 \\
 &= (K_C + m)^2 - m^2 \\
 &= K_C (K_C + 2m)
 \end{aligned} \tag{C.115}$$

$$p_C = \sqrt{K_C (K_C + 2m)} \tag{C.116}$$

$$dp_C p_C = dK_C (K_C + m) \tag{C.117}$$

と表せるから、 $p_C$  から  $K_C$  への変数変換を行うと、

$$N_e = \frac{1}{\pi^2} e^{(\mu_C - m)/k_B T_e} \int_0^\infty dK_C (K_C + m) \sqrt{K_C (K_C + 2m)} e^{-K_C/k_B T_e} \tag{C.118}$$

となる。次に、 $u_C \equiv K_C/k_B T_e$  と定義して変数変換を行うと、

$$\begin{aligned}
 N_e &= \frac{1}{\pi^2} e^{(\mu_C - m)/k_B T_e} \int_0^\infty k_B T_e du_C (k_B T_e u_C + m) \sqrt{k_B T_e u_C (k_B T_e u_C + 2m)} e^{-u_C} \\
 &= \frac{1}{\pi^2} e^{(\mu_C - m)/k_B T_e} m^3 \int_0^\infty \frac{k_B T_e}{m} du_C \left( \frac{k_B T_e}{m} u_C + 1 \right) \sqrt{\frac{k_B T_e}{m} u_C \left( \frac{k_B T_e}{m} u_C + 2 \right)} e^{-u_C}
 \end{aligned} \tag{C.119}$$

となる。ここで、

$$\theta_e \equiv \frac{k_B T_e}{m c^2} = \frac{k_B T_e}{m} \tag{C.120}$$

と定義すると、

$$N_e = \frac{1}{\pi^2} e^{(\mu_C - m)/k_B T_e} m^3 \theta_e \int_0^\infty du_C (\theta_e u_C + 1) \sqrt{\theta_e u_C (\theta_e u_C + 2)} e^{-u_C} \tag{C.121}$$

最終的に、化学ポテンシャルを含む項は、

$$e^{(\mu_C - m)/k_B T_e} = N_e \frac{\pi^2}{m^3} \theta_e^{-\frac{3}{2}} g(\theta_e) \tag{C.122}$$

$$g(\theta_e) \equiv \left[ \int_0^\infty du_C (\theta_e u_C + 1) \sqrt{u_C (\theta_e u_C + 2)} e^{-u_C} \right]^{-1} \tag{C.123}$$

と表せる。この結果は、ボルツマン方程式の数値積分計算の際に用いる。

### C.1.4 $g(\theta_e)$ の展開計算

ここでは、 $\theta_e \ll 1$  として、 $g(\theta_e)$  の展開計算について記述する。Mathematica を用いて計算すると、以下の結果を得る。

$$\sqrt{\theta_e u_C + 2} \simeq \sqrt{2} + \frac{u_C}{2\sqrt{2}}\theta_e - \frac{u_C^2}{16\sqrt{2}}\theta_e^2 + \frac{u_C^3}{64\sqrt{2}} - \frac{5u_C^4}{1024\sqrt{2}}\theta_e^4 + \frac{7u_C^5}{4096\sqrt{2}}\theta_e^5 + \dots \quad (\text{C.124})$$

$$\begin{aligned} g(\theta_e) &= \left[ \int_0^\infty du_C (\theta_e u_C + 1) \sqrt{u_C (\theta_e u_C + 2)} e^{-u_C} \right]^{-1} \\ &\simeq \sqrt{2} \left[ \int_0^\infty \left( u_C^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4} u_C^{\frac{3}{2}} \theta_e + \frac{7}{32} u_C^{\frac{5}{2}} \theta_e^2 - \frac{3}{128} u_C^{\frac{7}{2}} \theta_e^3 + \frac{11}{2048} u_C^{\frac{9}{2}} \theta_e^4 - \frac{13}{8192} u_C^{\frac{11}{2}} \theta_e^5 + \dots \right) e^{-u_C} du_C \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.125})$$

ここで、 $\Gamma$  関数の計算を用いると、

$$\begin{aligned} g(\theta_e) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( 1 + \frac{15}{8}\theta_e + \frac{105}{128}\theta_e^2 - \frac{315}{1024}\theta_e^3 + \frac{10395}{32768}\theta_e^4 - \frac{135135}{262144}\theta_e^5 + \dots \right)^{-1} \\ &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1+a)^{-1} \\ &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+\dots) \\ &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( 1 - \frac{15}{8}\theta_e + \frac{345}{128}\theta_e^2 - \frac{3285}{1024}\theta_e^3 + \frac{95355}{32768}\theta_e^4 - \frac{232065}{262144}\theta_e^5 + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{C.126})$$

この結果は、ボルツマン方程式の展開計算の際に用いる。

## 付録D $\bar{X}$ の導出

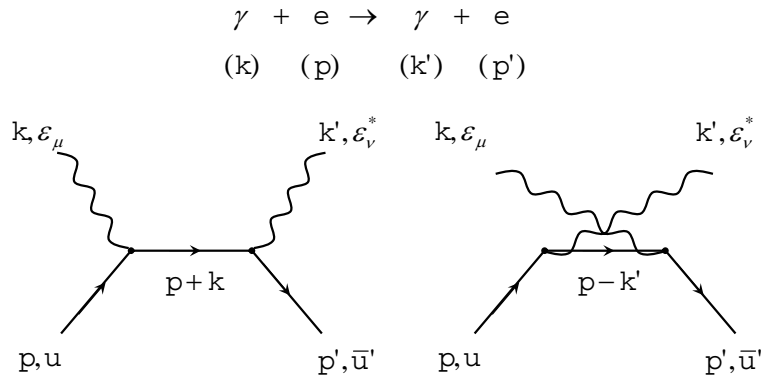


図 D.1: コンプトン散乱における  $\alpha^2$  のファイマン図

ここでは、図 D.1 のファイマン図に従って、 $\bar{X}$  の式を導出する。まず初めに、式を簡単にする為に、

$$\begin{aligned} s &\equiv (p+k)^2 = m_e^2 + 2p \cdot k \\ t &\equiv (k'-k)^2 = -2k \cdot k' \\ u &\equiv (p-k')^2 = m_e^2 - 2p \cdot k' \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

と定義する。この定義によれば、

$$s + t + u = 2m_e^2 \quad (\text{D.2})$$

が成り立つ。さて、ここから計算に入っていくが、ファイマン図に従うと、散乱振幅  $M_{fi}$  は、

$$M_{fi} = e^2 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\nu^*(k', \lambda') \bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} u(p, s) \quad (\text{D.3})$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}
Q^{\mu\nu} &= \gamma^\mu \frac{1}{(\not{p} - \not{k}') - m_e} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{1}{(\not{p} + \not{k}) - m_e} \gamma^\mu \\
&= \frac{1}{u - m_e^2} \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu + \frac{1}{s - m_e^2} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu
\end{aligned} \tag{D.4}$$

である。ここで  $\bar{Q}^{\rho\sigma} \equiv \gamma_0 Q^{\rho\sigma\dagger} \gamma_0 = Q^{\sigma\rho}$  である事に注意すると、

$$\begin{aligned}
|M_{fi}|^2 &= e^4 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) \epsilon_\sigma(k', \lambda') \epsilon_\nu^*(k', \lambda') \bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} u(p, s) \bar{(p, s)} \bar{Q}^{\rho\sigma} u(p', s') \\
&= e^4 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) \epsilon_\sigma(k', \lambda') \epsilon_\nu^*(k', \lambda') \bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} u(p, s) \bar{(p, s)} Q^{\sigma\rho} u(p', s') \\
&= e^4 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) \epsilon_\sigma(k', \lambda') \epsilon_\nu^*(k', \lambda') \text{Tr} [u(p, s) \bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} u(p, s) \bar{(p, s)} Q^{\sigma\rho}]
\end{aligned} \tag{D.5}$$

となる。次に電子の始状態と終状態においてスピンについて和をとり平均すると、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{s, s'} |M_{fi}| &= \frac{1}{2} e^4 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) \epsilon_\sigma(k', \lambda') \epsilon_\nu^*(k', \lambda') \\
&\quad \text{Tr} \left[ \sum_{s'} u(p', s') \bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} \sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) Q^{\sigma\rho} \right] \\
&= \frac{1}{2} e^4 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) \epsilon_\sigma(k', \lambda') \epsilon_\nu^*(k', \lambda') \text{Tr} \left[ \left( \frac{\not{p}' + m_e}{2m_e} \right) Q^{\mu\nu} \left( \frac{\not{p} + m_e}{2m_e} \right) Q^{\sigma\rho} \right]
\end{aligned} \tag{D.6}$$

と変形できる。さて、始状態の光子が偏光していない事を考えると、

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm 1} \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) = -\frac{1}{2} g_{\mu\rho} \tag{D.7}$$

が成り立つ。また、終状態の光子が偏光している場合を考慮すると、(D.6) 式は、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{\text{final photon}} \frac{1}{2} \sum_{s, s'} |M_{fi}| \\
&= \frac{1}{2} e^4 \frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm 1} \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) A_{\sigma\nu} \text{Tr} \left[ \left( \frac{\not{p}' + m_e}{2m_e} \right) Q^{\mu\nu} \left( \frac{\not{p} + m_e}{2m_e} \right) Q^{\sigma\rho} \right] \\
&= \frac{1}{2} e^4 \left( -\frac{1}{2} g_{\mu\rho} \right) A_{\sigma\nu} \text{Tr} \left[ \left( \frac{\not{p}' + m_e}{2m_e} \right) Q^{\mu\nu} \left( \frac{\not{p} + m_e}{2m_e} \right) Q^{\sigma\rho} \right] \\
&= -\frac{e^4}{16m_e^2} A^{\sigma\nu} \text{Tr} [(\not{p}' + m_e) Q^{\mu\nu} (\not{p} + m_e) Q^{\sigma\rho}] \\
&= -\frac{e^4}{16m_e^2} A_{\sigma\nu} W^{\nu\sigma}
\end{aligned} \tag{D.8}$$

となる。ここで、

$$W \equiv \text{Tr} [(\not{p}' + m_e) Q^{\mu\nu} (\not{p} + m_e) Q^{\sigma\rho}] \tag{D.9}$$

である。今は、終状態も偏光していない場合を考えているので、 $A_{\sigma\nu} = -1/2g_{\sigma\nu}$  として最後に計算する。また、 $W$  は、

$$W = \text{Tr} [\not{p}' Q^{\mu\nu} \not{p} Q^{\sigma\rho}] + m_e \text{Tr} [Q^{\mu\nu} \not{p} Q^{\sigma\rho}] + m_e \text{Tr} [\not{p}' Q^{\mu\nu} Q^{\sigma\rho}] + m_e^2 \text{Tr} [Q^{\mu\nu} Q^{\sigma\rho}] \quad (\text{D.10})$$

となる。この計算を各項に分けて以下計算を行う。

$$\begin{aligned} & \text{Tr} [Q^{\mu\nu} Q^{\sigma}_{\mu}] \textit{term} \\ &= \text{Tr} \left[ \left\{ \frac{1}{u - m_e^2} \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu + \frac{1}{s - m_e^2} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \right\} \right. \\ & \quad \left. \left\{ \frac{1}{u - m_e^2} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu + \frac{1}{s - m_e^2} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right\} \right] \\ &= \text{Tr} \left[ \frac{1}{(u - m_e^2)^2} \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right. \\ & \quad + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \\ & \quad + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \\ & \quad \left. + \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \quad (\text{D.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{first line} &= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \gamma_\mu + m_e^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma_\mu] \\ &= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} \text{Tr} [2(p - k')^2 (\gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\nu) + 4m_e^2 g^{\nu\sigma}] \\ &= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} 4 [4(p - k')^2 + 4m_e^2] g^{\nu\sigma} \\ &= \frac{16}{(u - m_e^2)^2} \{ (p - k')^2 + m_e^2 \} g^{\nu\sigma} \quad (\text{D.12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{second line} &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma + m_e^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma^\sigma] \\ &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [4(p - k')^\nu (\not{p} - \not{k}) \gamma^\sigma - 2m_e^2 \gamma^\nu \gamma^\sigma] \\ &= \frac{16}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left\{ (p - k')^\nu (p + k)^\sigma + \frac{1}{2} m_e^2 g^{\nu\sigma} \right\} \quad (\text{D.13}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{third line} &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu] \\ &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \{ 4(p - k')^\sigma - 2m_e \gamma^\sigma \}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [4(p - k')^\sigma \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) - 2m_e^2 \gamma^\nu \gamma^\sigma] \\
&= \frac{4}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{4(p - k')^\sigma (p + k)^\nu - 2m_e^2 g^{\nu\sigma}\} \\
&= \frac{16}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left\{ (p + k)^\nu (p - k')^\sigma - \frac{1}{2} m_e^2 g^{\nu\sigma} \right\} \tag{D.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{fourth line} &= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \text{Tr} [4\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} 4 \{ (p + k)^2 \text{Tr} [\gamma^\nu \gamma^\sigma] + m_e^2 \text{Tr} [\gamma^\nu \gamma^\sigma] \} \\
&= \frac{4}{(s - m_e^2)^2} 4 \{ (p + k)^2 g^{\nu\sigma} + m_e^2 g^{\nu\sigma} \} \\
&= \frac{16}{(s - m_e^2)^2} \{ (p + k)^2 + m_e^2 \} g^{\nu\sigma} \tag{D.15}
\end{aligned}$$

$\text{Tr} [Q^{\mu\nu} Q^\sigma{}_\mu]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16}{(u - m_e^2)^2} \{ (p - k')^2 + m_e^2 \} g^{\nu\sigma} + \frac{16}{(s - m_e^2)^2} \{ (p + k)^2 + m_e^2 \} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{16}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{ (p + k)^\nu (p - k')^\sigma + (p + k)^\sigma (p - k')^\nu - m_e^2 g^{\nu\sigma} \} \\
&= \frac{16}{(u - m_e^2)^2} (u + m_e^2) g^{\nu\sigma} + \frac{16}{(s - m_e^2)^2} (s + m_e^2) g^{\nu\sigma} - \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{16}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{ (p + k)^\nu (p - k')^\sigma + (p + k)^\sigma (p - k')^\nu \} \\
&= 16 \left\{ \frac{u + m_e^2}{(u - m_e^2)^2} + \frac{s + m_e^2}{(s - m_e^2)^2} - \frac{m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \right\} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{16}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{ (p + k)^\nu (p - k')^\sigma + (p + k)^\sigma (p - k')^\nu \} \tag{D.16}
\end{aligned}$$

$\text{Tr} [\not{p}' Q^{\mu\nu} Q^\sigma{}_\mu]$  term

$$\begin{aligned}
&= \text{Tr} \left[ \frac{1}{(u - m_e^2)^2} \not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right. \\
&\quad + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \\
&\quad + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \\
&\quad \left. + \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \tag{D.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{first line} &= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu \{ m_e \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') + m_e (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \gamma^\sigma \} \gamma_\mu] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} m_e \text{Tr} [\not{p}' \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \gamma_\mu + \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma_\mu \}] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} m_e \text{Tr} [(-2) \not{p}' \{ (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \gamma^\nu + \gamma^\sigma \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \}] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} m_e (-2) \text{Tr} [\not{p}' (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \gamma^\nu + \not{p}' \gamma^\sigma \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}')] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} m_e (-2) 4 \{ p' \cdot (p - k') g^{\sigma\nu} - p'^\sigma (p - k')^\nu + p'^\nu (p - k')^\sigma \\
&\quad + p'^\sigma (p - k')^\nu - p'^\nu (p - k')^\sigma + p' \cdot (p - k') g^{\sigma\nu} \} \\
&= \frac{-16m_e}{(u - m_e^2)^2} p' \cdot (p - k') g^{\sigma\nu} \tag{D.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{second line} &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\not{p}' \{ 4(p - k')^\nu - 2m_e \gamma^\nu \} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [4m_e (p - k')^\nu \not{p}' \gamma^\sigma - 2m_e \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{4}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} m_e \\
&\quad \times [4(p - k')^\nu p'^\sigma - 2 \{ p'^\nu (p + k)^\sigma - p' \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} + p'^\sigma (p + k)^\nu \}] \\
&= \frac{8m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times [2(p - k')^\nu p'^\sigma + p' \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} - \{ p'^\nu (p + k)^\sigma + p'^\sigma (p + k)^\nu \}] \tag{D.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{third line} &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \{ 4(p - k')^\sigma - 2m_e \gamma^\sigma \}] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [4(p - k')^\sigma \not{p}' \gamma^\nu m_e - 2m_e \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{4}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times \{ 4m_e (p - k')^\sigma p'^\nu - 2m_e [p'^\nu (p + k)^\sigma - p' \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} + p'^\sigma (p + k)^\nu] \} \\
&= \frac{8m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)}
\end{aligned}$$



$$\times [2p'^{\nu} (p - k')^{\sigma} + p' \cdot (p + k)g^{\nu\sigma} - \{p'^{\nu} (p + k)^{\sigma} + p'^{\sigma} (p + k)^{\nu}\}] \quad (\text{D.20})$$

$$\begin{aligned} \text{fourth line} &= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^{\nu} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^{\mu} \gamma_{\mu} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^{\sigma}] \\ &= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \text{Tr} [4\not{p}' \gamma^{\nu} (\not{p} + \not{k} + m_e) (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^{\sigma}] \\ &= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} 4m_e \text{Tr} [\not{p}' \gamma^{\nu} (\not{p} + \not{k}) \gamma^{\sigma} + \not{p}' \gamma^{\nu} (\not{p} + \not{k}) \gamma^{\sigma}] \\ &= \frac{8m_e}{(s - m_e^2)^2} 4 [p'^{\nu} (p + k)^{\sigma} - p' \cdot (p + k)g^{\nu\sigma} + p'^{\sigma} (p + k)^{\nu}] \\ &= \frac{32m_e}{(s - m_e^2)^2} \{-p' \cdot (p + k)g^{\nu\sigma} + p'^{\nu} (p + k)^{\sigma} + p'^{\sigma} (p + k)^{\nu}\} \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

$$\text{Tr} [\not{p}' Q^{\mu\nu} Q^{\sigma}_{\mu}]$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{16m_e}{(u - m_e^2)^2} p' \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + \frac{8m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} [2 \{p'^{\nu} (p - k')^{\sigma} + p'^{\sigma} (p - k')^{\nu}\} \\ &\quad + 2p' \cdot (p + k)g^{\nu\sigma} - 2 \{p'^{\nu} (p + k)^{\sigma} + p'^{\sigma} (p + k)^{\nu}\}] \\ &\quad + \frac{32m_e}{(s - m_e^2)^2} \{-p' \cdot (p + k)g^{\nu\sigma} + p'^{\nu} (p + k)^{\sigma} + p'^{\sigma} (p + k)^{\nu}\} \\ &= -\frac{16m_e}{(u - m_e^2)^2} p' \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} \\ &\quad + \frac{16m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{-p'^{\nu} (k + k')^{\sigma} - p'^{\sigma} (k + k')^{\nu} + p' \cdot (p + k)g^{\nu\sigma}\} \\ &\quad + \frac{32m_e}{(s - m_e^2)^2} \{-p' \cdot (p + k)g^{\nu\sigma} + p'^{\nu} (p + k)^{\sigma} + p'^{\sigma} (p + k)^{\nu}\} \\ &= 16 \left\{ -\frac{m_e}{(u - m_e^2)^2} p' \cdot (p - k') + \frac{m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} p' \cdot (p + k) - \frac{2m_e}{(s - m_e^2)^2} p' \cdot (p + k) \right\} g^{\nu\sigma} \\ &\quad - \frac{16}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\ &\quad \times \{p'^{\nu} (k + k')^{\sigma} + p'^{\sigma} (k + k')^{\nu}\} + \frac{32m_e}{(s - m_e^2)^2} \{p'^{\nu} (p + k)^{\sigma} + p'^{\sigma} (p + k)^{\nu}\} \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

$$\text{Tr} [Q^{\mu\nu} \not{p} Q^{\sigma}_{\mu}] \text{ term}$$

$$\begin{aligned} &= \text{Tr} \left[ \frac{1}{(u - m_e^2)^2} \gamma^{\mu} (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^{\nu} \not{p} \gamma^{\sigma} (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_{\mu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \gamma^{\mu} (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^{\nu} \not{p} \gamma_{\mu} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^{\sigma} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \\
& + \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \Big]
\end{aligned} \tag{D.23}$$

$$\begin{aligned}
\text{first line} &= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} \text{Tr} [m_e \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma \gamma_\mu + m_e \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \gamma_\mu] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} 2m_e \text{Tr} [\gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} + \not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \\
&\quad + (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}')] \\
&= \frac{8m_e}{(u - m_e^2)^2} [(p - k')^\sigma p^\nu - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} \\
&\quad + (p - k') p^\sigma + p^\nu (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\sigma (p - k')^\nu \\
&\quad + (p - k')^\nu p^\sigma - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + (p - k')^\sigma p^\nu + p^\sigma (p - k')^\nu \\
&\quad - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (p - k')^\sigma] \\
&= \frac{32m_e}{(u - m_e^2)^2} \{p^\nu (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k')^\nu - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma}\}
\end{aligned} \tag{D.24}$$

$$\begin{aligned}
\text{second line} &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\{-2\not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') + 4m_e p^\nu\} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [-2m_e \not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma + 4m_e p^\nu (\not{p} + \not{k})^\sigma] \\
&= \frac{4}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} [-2m_e \{p^\nu (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\sigma (p - k')^\nu\} \\
&\quad + 4m_e p^\nu (p + k)^\sigma] \\
&= \frac{-8m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times \{-p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k')^\nu - 2p^\nu (p + k)^\sigma\}
\end{aligned} \tag{D.25}$$

$$\begin{aligned}
\text{third line} &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \{-2(\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \not{p} + 4m_e p^\sigma\}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [-2m_e \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \not{p} + 4m_e p^\sigma \gamma^\nu (\not{p} + \not{k})] \\
&= \frac{4}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} [-2m_e \{ (p - k')^\nu p^\sigma - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + (p - k')^\sigma p^\nu \} \\
&\quad + 4m_e (p + k)^\nu p^\sigma] \\
&= \frac{-8m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times \{ -p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k')^\nu - 2p^\sigma (p + k)^\nu \}
\end{aligned} \tag{D.26}$$

$$\begin{aligned}
\text{fourth line} &= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} (-2) \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \not{p} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{-2m_e}{(s - m_e^2)^2} \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \not{p} \gamma^\sigma + \gamma^\nu \not{p} (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{-2m_e}{(s - m_e^2)^2} 4 \{ (p + k)^\nu p^\sigma - p^\nu (p + k)^\sigma + p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} \\
&\quad + p^\nu (p + k)^\sigma - p^\sigma (p + k)^\nu + p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} \} \\
&= -\frac{16m_e}{(s - m_e^2)^2} p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma}
\end{aligned} \tag{D.27}$$

$\text{Tr} [Q^{\mu\nu} \not{p} Q^\sigma{}_\mu]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{32m_e}{(u - m_e^2)^2} \{ p^\nu (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k')^\nu - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} \} \\
&\quad - \frac{16m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times \{ -p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k')^\nu - p^\nu (p - k)^\sigma - p^\sigma (p - k)^\nu \} \\
&\quad - \frac{16m_e}{(s - m_e^2)^2} p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} \\
&= \frac{32m_e}{(u - m_e^2)^2} \{ -p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k')^\nu \} \\
&\quad + \frac{16m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{ p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (k + k')^\sigma + p^\sigma (k + k')^\nu \} \\
&\quad - \frac{16m_e}{(s - m_e^2)^2} p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} \\
&= 16 \left\{ -\frac{2m_e}{(u - m_e^2)^2} p \cdot (p - k') + \frac{m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} p \cdot (p - k') - \frac{m_e}{(s - m_e^2)^2} p \cdot (p + k) \right\} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{32m_e}{(u - m_e^2)^2} \{ p^\nu (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k')^\nu \} \\
&\quad + \frac{16m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{ p^\nu (k + k')^\sigma + p^\sigma (k + k')^\nu \}
\end{aligned} \tag{D.28}$$

$\text{Tr} [\not{p}' Q^{\mu\nu} \not{p} Q^\sigma_\mu]$  term

$$\begin{aligned}
&= \text{Tr} \left[ \frac{1}{(u-m_e^2)^2} \not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right. \\
&\quad + \frac{1}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \\
&\quad + \frac{1}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \\
&\quad \left. + \frac{1}{(s-m_e^2)^2} \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right]
\end{aligned} \tag{D.29}$$

$$\begin{aligned}
\text{first line} &= \frac{1}{(u-m_e^2)^2} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu] \\
&= \frac{1}{(u-m_e^2)^2} \{ \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \gamma_\mu] + m_e^2 \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma \gamma_\mu] \} \\
&= \frac{1}{(u-m_e^2)^2} \{ \text{Tr} [\gamma_\mu \not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}')] + m_e^2 \text{Tr} [\gamma_\mu \not{p}' \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma] \} \\
&= \frac{-2}{(u-m_e^2)^2} \{ \text{Tr} [\not{p}' (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}')] + m_e^2 \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma] \} \\
&= \frac{-2}{(u-m_e^2)^2} \{ p' \cdot (p - k') \text{Tr} [\gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}')] - p'^\nu \text{Tr} [(\not{p} - \not{k}') \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}')] \\
&\quad + p' \cdot p \text{Tr} [(\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}')] - p'^\sigma \text{Tr} [(\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} (\not{p} - \not{k}')] \\
&\quad + p' \cdot (p - k') \text{Tr} [(\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma] + m_e^2 \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma] \} \\
&= \frac{-8}{(u-m_e^2)^2} [2p' \cdot (p - k') \{ p^\mu (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\sigma (p - k')^\nu \} \\
&\quad - p'^\nu \{ p \cdot (p - k') (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') (p - k')^\sigma + (p - k')^2 p^\sigma \} \\
&\quad + p' \cdot p \{ (p - k')^\nu (p - k')^\sigma - (p - k')^\sigma (p - k')^\nu + (p - k')^2 g^{\nu\sigma} \} \\
&\quad - p'^\sigma \{ (p - k')^\nu p \cdot (p - k') - p \cdot (p - k') (p - k')^\nu + (p - k')^2 p^\nu \} \\
&\quad + m_e^2 \{ p'^\nu p^\sigma - p' \cdot p g^{\nu\sigma} + p'^\sigma p^\nu \}] \\
&= \frac{-8}{(u-m_e^2)^2} \{ 2p' \cdot (p - k') [-p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k')^\nu] \\
&\quad - (p - k')^2 (p'^\nu p^\sigma + p'^\sigma p^\nu - p' \cdot p g^{\nu\sigma}) + m_e^2 (-p' \cdot p g^{\nu\sigma} + p'^\nu p^\sigma + p'^\sigma p^\nu) \} \\
&= \frac{-8}{(u-m_e^2)^2} \{ (u - m_e^2) (p' \cdot p g^{\nu\sigma} - p'^\nu p^\sigma - p'^\sigma p^\nu) \\
&\quad - 2p' \cdot (p - k') [p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} - p^\nu (p - k')^\sigma - p^\sigma (p - k')^\nu] \}
\end{aligned} \tag{D.30}$$

$$\text{second line} = \frac{1}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\not{p}' \{ -2\not{p}\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') + 4m_e p^\nu \} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{ -2\text{Tr} [\not{p}'\not{p}\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] + 4m_e^2 \text{Tr} [\not{p}'\gamma^\sigma] p^\nu \} \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} [ -2 \{ p \cdot p' \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] \\
&\quad - p'^\nu \text{Tr} [\not{p} (\not{p} - \not{k}') (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] \\
&\quad + p' \cdot (p - k') \text{Tr} [\not{p}\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] - p' \cdot (p + k) \text{Tr} [\not{p}\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma] \\
&\quad + p'^\sigma \text{Tr} [\not{p}\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') (\not{p} + \not{k})] \} + 4m_e^2 p^\nu \text{Tr} [\not{p}'\gamma^\sigma] ] \\
&= \frac{4}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} [ -2 \{ p' \cdot p ((p - k')^\nu (p + k)^\sigma \\
&\quad - (p - k')^\sigma (p + k)^\nu + (p - k') \cdot (p + k) g^{\nu\sigma}) \\
&\quad - p'^\nu (p \cdot (p - k') (p + k)^\sigma - p \cdot (p + k) (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k') \cdot (p + k)) \\
&\quad + p' \cdot (p - k') (p^\nu (p + k)^\sigma - p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} + p^\sigma (p + k)^\nu) \\
&\quad - p' \cdot (p + k) (p^\nu (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\sigma (p - k')^\nu) \\
&\quad + p'^\sigma (p^\nu (p - k') \cdot (p + k) - (p + k)^\nu p \cdot (p - k') \\
&\quad + (p - k')^\nu p \cdot (p + k)) \} + 4m_e^2 p^\nu p'^\sigma ] \\
&= \frac{-8}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times [ p'^\nu \{ p \cdot (p + k) (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') (p + k)^\sigma - (p + k) \cdot (p - k') p^\sigma \} \\
&\quad + p'^\sigma \{ p \cdot (p + k) (p - k')^\nu - p \cdot (p - k') (p + k)^\nu + (p + k) \cdot (p - k') p^\nu \} \\
&\quad + (p' \cdot p) \{ (p + k) \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} - (p + k)^\nu (p - k')^\sigma + (p + k)^\sigma (p - k')^\nu \} \\
&\quad + p' \cdot (p + k) \{ p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} - p^\nu (p - k')^\sigma - p^\sigma (p - k')^\nu \} \\
&\quad - p' \cdot (p - k') \{ p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} - p^\nu (p + k)^\sigma - p^\sigma (p + k)^\nu \} - 2m_e^2 p^\nu p'^\sigma ]
\end{aligned} \tag{D.31}$$

$$\begin{aligned}
\text{third line} &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\not{p}'\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p}\gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} [\not{p}'\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \{ -2(\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \not{p} + 4m_e p^\sigma \} ] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{ -2\text{Tr} [\not{p}'\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \not{p}] + 4m_e^2 p^\sigma \text{Tr} [\not{p}'\gamma^\nu] \} \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{ -2 [ p'^\nu \text{Tr} [(\not{p} + \not{k}) (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \not{p}] \\
&\quad - p' \cdot (p + k) \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \not{p}] \\
&\quad + p' \cdot (p - k') \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma \not{p}] - p'^\sigma \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) (\not{p} - \not{k}') \not{p}] \\
&\quad + p \cdot p \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma] ] + 4m_e^2 p^\sigma \text{Tr} [\not{p}'\gamma^\nu] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} [-2 \{p' \cdot ((p + k) \cdot (p - k')) p^\sigma \\
&\quad - (p + k)^\sigma p \cdot (p - k') + (p - k')^\sigma p \cdot (p + k) \\
&\quad - p' \cdot (p + k) ((p - k')^\nu p^\sigma - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + (p - k')^\sigma p^\nu) \\
&\quad + p' \cdot (p - k') ((p + k)^\nu p^\sigma - p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} + (p + k)^\sigma p^\nu) \\
&\quad - p'^\sigma (p \cdot (p - k') (p + k)^\nu - p \cdot (p + k) (p - k')^\nu + (p + k) \cdot (p - k') p^\nu) \\
&\quad + p' \cdot p ((p + k)^\nu (p - k')^\sigma - (p + k)^\sigma (p - k')^\nu \\
&\quad + (p + k) \cdot (p - k') g^{\nu\sigma}) \} + 4m_e^2 p^\sigma p'^\nu] \\
&= \frac{-8}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times [p'^\nu \{p \cdot (p + k) (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') (p + k)^\sigma + (p + k) \cdot (p - k') p^\sigma\} \\
&\quad + p'^\sigma \{p \cdot (p + k) (p - k')^\nu - p \cdot (p - k') (p + k)^\nu - (p + k) \cdot (p - k')^\nu\} \\
&\quad + (p' \cdot p) \{(p + k) \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + (p + k)^\nu (p - k')^\sigma - (p + k)^\sigma (p - k')^\nu\} \\
&\quad + p' \cdot (p + k) \{p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} - p^\nu (p - k')^\sigma - p^\sigma (p - k')^\nu\} \\
&\quad - p' \cdot (p - k') \{p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} - p^\nu (p + k)^\sigma - p^\sigma (p + k)^\nu\} - 2m_e^2 p^\sigma p'^\nu]
\end{aligned} \tag{D.32}$$

$$\begin{aligned}
\text{fourth line} &= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \text{Tr} [p' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{-2}{(s - m_e^2)^2} \text{Tr} [p' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \not{p} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{-2}{(s - m_e^2)^2} \{ \text{Tr} [p' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \not{p} (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] + m_e^2 \text{Tr} [p' \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma] \} \\
&= \frac{-2}{(s - m_e^2)^2} \{ p'^\nu \text{Tr} [(\not{p} + \not{k}) \not{p} (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] - p' \cdot (p + k) \text{Tr} [\gamma^\nu \not{p} (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] \\
&\quad + p' \cdot p \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] - p' \cdot (p + k) \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \not{p} \gamma^\sigma] \\
&\quad + p'^\sigma \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \not{p} (\not{p} + \not{k})] + m_e^2 \text{Tr} [p' \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma] \} \\
&= \frac{-2 \cdot 4}{(s - m_e^2)^2} \{ p'^\nu (p \cdot (p + k)^\sigma - p^\sigma (p + k)^2 + p \cdot (p + k) (p + k)^\sigma) \\
&\quad - p' \cdot (p + k) (p^\nu (p + k)^\sigma - p^\sigma (p + k)^\nu + p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma}) \\
&\quad + p' \cdot p ((p + k)^\nu (p + k)^\sigma - (p + k)^\nu (p + k)^\sigma + (p + k)^2 g^{\nu\sigma}) \\
&\quad - p' \cdot (p + k) ((p + k)^\nu p^\sigma - (p + k)^\sigma p^\nu + p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma}) \\
&\quad + p'^\sigma (p \cdot (p + k) (p + k)^\nu - (p + k)^2 p^\nu + p \cdot (p + k) (p + k)^\nu) \\
&\quad + m_e^2 (p'^\nu p^\sigma - p' \cdot p g^{\nu\sigma} + p'^\sigma p^\nu) \} \\
&= \frac{-8}{(s - m_e^2)^2} [p'^\nu \{2p \cdot (p + k) (p + k)^\sigma - (p + k)^2 p^\sigma\} \\
&\quad + p'^\sigma \{2p \cdot (p + k) (p + k)^\nu - (p + k)^2 p^\nu\}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (p' \cdot p) (p+k)^2 g^{\nu\sigma} - 2p' \cdot (p+k) p \cdot (p+k) g^{\nu\sigma} \\
& - m_e^2 (p' \cdot p g^{\nu\sigma} - p'^{\nu} p^{\sigma} - p'^{\sigma} p^{\nu})]
\end{aligned} \tag{D.33}$$

$\text{Tr} [\not{p} Q^{\mu\nu} \not{p} Q_{\mu}]$

$$\begin{aligned}
& = \frac{-8}{(u-m_e^2)^2} \{ (u-m_e^2) (p' \cdot p g^{\nu\sigma} - p'^{\nu} p^{\sigma} - p'^{\sigma} p^{\nu}) \\
& \quad - 2p' \cdot (p-k') [p \cdot (p-k') g^{\nu\sigma} - p^{\nu} (p-k')^{\sigma} - p^{\sigma} (p-k')^{\nu}] \} \\
& \quad - \frac{16}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} [p'^{\nu} \{ p \cdot (p+k) (p-k')^{\sigma} - p \cdot (p-k') (p+k)^{\sigma} \} \\
& \quad + p'^{\sigma} \{ p \cdot (p+k) (p-k')^{\nu} - p \cdot (p-k') (p+k)^{\nu} \} + (p' \cdot p) (p+k) \cdot (p-k') g^{\nu\sigma} \\
& \quad + p' \cdot (p+k) \{ p \cdot (p-k') g^{\nu\sigma} - p^{\nu} (p-k')^{\sigma} - p^{\sigma} (p-k')^{\nu} \} \\
& \quad - p' \cdot (p-k') \{ p \cdot (p+k) g^{\nu\sigma} - p^{\nu} (p+k)^{\sigma} - p^{\sigma} (p+k)^{\nu} \} - m_e^2 (p^{\nu} p'^{\sigma} + p^{\sigma} p'^{\nu})] \\
& \quad - \frac{8}{(s-m_e^2)^2} [p'^{\nu} \{ 2p \cdot (p+k) (p+k)^{\sigma} - (p+k)^2 p^{\sigma} \} \\
& \quad + p'^{\sigma} \{ 2p \cdot (p+k) (p+k)^{\nu} - (p+k)^2 p^{\nu} \} \\
& \quad + (p' \cdot p) (p+k)^2 g^{\nu\sigma} - 2p' \cdot (p+k) p \cdot (p+k) g^{\nu\sigma} \\
& \quad - m_e^2 (p' \cdot p g^{\nu\sigma} - p'^{\nu} p^{\sigma} - p'^{\sigma} p^{\nu})]
\end{aligned} \tag{D.34}$$

となり、4つの項を計算する事ができる。ここで、

$$\begin{aligned}
p' & = p+k-k' \\
p \cdot k & = \frac{1}{2} (s-m_e^2) \\
p \cdot k' & = -\frac{1}{2} (u-m_e^2) \\
k \cdot k' & = -\frac{1}{2} t = \frac{1}{2} (s+u-m_e^2)
\end{aligned} \tag{D.35}$$

の関係式を用いると、

$$\begin{aligned}
p \cdot p & = (p+k-k') \cdot p = m_e^2 + p \cdot k - p \cdot k' \\
& = m_e^2 + \frac{1}{2} (s-m_e^2) + \frac{1}{2} (u-m_e^2) \\
& = \frac{1}{2} (s+u) \\
p' \cdot (p+k) & = p \cdot (p+k) = \frac{1}{2} (s+m_e^2) \\
p' \cdot (p-k') & = p \cdot (p-k') = \frac{1}{2} (u+m_e^2) \\
(p+k) (p-k') & = m_e^2 \\
p \cdot (k-k') & = \frac{1}{2} (s+u-2m_e^2)
\end{aligned} \tag{D.36}$$

となり、この式を用いると、 $W$  における各々の項は、

$$W^{\nu\sigma} = \text{Tr} [\not{p}' Q^{\mu\nu} \not{p} Q_\mu^\sigma] + m_e \text{Tr} [Q^{\mu\nu} \not{p} Q_\mu^\sigma] + m_e \text{Tr} [\not{p}' Q^{\mu\nu} Q_\mu^\sigma] + m_e^2 \text{Tr} [Q^{\mu\nu} Q_\mu^\sigma] \quad (\text{D.37})$$

$$\begin{aligned}
m_e^2 \text{Tr} [Q^{\mu\nu} Q_\mu^\sigma] &= \frac{16m_e^2 (u + m_e^2)}{(u - m_e^2)} g^{\nu\sigma} + \frac{16m_e^2 (s + m_e^2)}{(s - m_e^2)} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{-m_e^2 g^{\nu\sigma} + (p + k)^\nu (p - k')^\sigma + (p + k)^\sigma (p - k')^\nu\} \\
&= 16m_e^2 \left\{ \frac{u + m_e^2}{(u - m_e^2)^2} - \frac{m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} + \frac{s + m_e^2}{(s - m_e^2)^2} \right\} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times \{2p^\nu p^\sigma + (p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu) - (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu) - (k^\nu k'^\sigma + k^\sigma k'^\nu)\} \\
m_e \text{Tr} [\not{p}' Q^{\mu\nu} Q_\mu^\sigma] &= -8m_e^2 \left\{ \frac{u + m_e^2}{(u - m_e^2)^2} - \frac{s + m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} + \frac{2(s + m_e^2)}{(s - m_e^2)^2} \right\} g^{\nu\sigma} \\
&\quad - \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times \{(p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu) + (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu) + 2k^\nu k^\sigma - 2k'^\nu k'^\sigma\} \\
&\quad + \frac{32m_e^2}{(s - m_e^2)^2} \\
&\quad \times \{2p^\nu p^\sigma + 2(p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu) + 2k^\nu k^\sigma - (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu) - (k^\nu k'^\sigma + k^\sigma k'^\nu)\} \\
m_e \text{Tr} [Q^{\mu\nu} \not{p} Q_\mu^\sigma] &= -8m_e^2 \left\{ \frac{2(u + m_e^2)}{(u - m_e^2)^2} - \frac{u + m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} + \frac{s + m_e^2}{(s - m_e^2)^2} \right\} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{(p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu) + (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu)\} \\
&\quad + \frac{32m_e^2}{(s - m_e^2)^2} \{2p^\nu p^\sigma - (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu)\} \\
\text{Tr} [\not{p}' Q^{\mu\nu} \not{p} Q_\mu^\sigma] &= -\frac{8}{(u - m_e^2)^2} \left[ \frac{1}{2} \{(s + u)(u - m_e^2) - (u + m_e^2)^2\} g^{\nu\sigma} + 4m_e^2 p^\nu p^\sigma \right. \\
&\quad \left. - (u - m_e^2)(p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu) - 2m_e^2 (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu) \right] \\
&\quad - \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times \left[ \frac{1}{2} m_e^2 (s + u) g^{\nu\sigma} - 2m_e^2 p^\nu p^\sigma + \frac{1}{2} (s - u - 2m_e^2) (p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (s - u - 2m_e^2) (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu) - (u + m_e^2) k^\nu k^\sigma + (s + m_e^2) k'^\nu k'^\sigma \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (s - u) (k^\nu k'^\sigma + k^\sigma k'^\nu) \right] \quad (\text{D.38})
\end{aligned}$$

となる。この結果を次の各項についてまとめると、



$(g^{\nu\sigma})$

$$\begin{aligned} & 16m_e^2 \left\{ \frac{u+m_e^2}{(u-m_e^2)^2} - \frac{m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{s+m_e^2}{(s-m_e^2)^2} \right\} \\ & - 8m_e^2 \left\{ \frac{u+m_e^2}{(u-m_e^2)^2} - \frac{s+m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{2(s+m_e^2)}{(s-m_e^2)^2} \right\} \\ & - 8m_e^2 \left\{ \frac{2(u+m_e^2)}{(u-m_e^2)^2} - \frac{u+m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{s+m_e^2}{(s-m_e^2)^2} \right\} \\ & - \frac{4}{(u-m_e^2)^2} \left\{ (s+u)(u-m_e^2) - (u+m_e^2)^2 \right\} - \frac{8m_e^2(s+u)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \\ & - \frac{4}{(s-m_e^2)^2} \left\{ (s+u)(s-m_e^2) - (s+m_e^2)^2 \right\} \\ & = -\frac{8m_e^2(u+m_e^2)}{(u-m_e^2)^2} - \frac{4}{(u-m_e^2)^2} \left\{ (s+u)(u-m_e^2) - (u+m_e^2)^2 \right\} \\ & - \frac{8m_e^2(s+m_e^2)}{(s-m_e^2)^2} - \frac{4}{(s-m_e^2)^2} \left\{ (s+u)(s-m_e^2) - (s+m_e^2)^2 \right\} \\ & = -\frac{4}{(u-m_e^2)^2} \left\{ 2m_e^2(u+m_e^2) + (s+u)(u-m_e^2) - (u+m_e^2)^2 \right\} \\ & - \frac{4}{(s-m_e^2)^2} \left\{ 2m_e^2(s+m_e^2) + (s+u)(s-m_e^2) - (s+m_e^2)^2 \right\} \\ & = -4(u-m_e^2)(s-m_e^2) \left\{ \frac{1}{(u-m_e^2)^2} + \frac{1}{(s-m_e^2)^2} \right\} \\ & = -4 \left\{ \frac{s-m_e^2}{u-m_e^2} + \frac{u-m_e^2}{s-m_e^2} \right\} \end{aligned} \tag{D.39}$$

$(p^\nu p^\sigma)$

$$\begin{aligned} & \frac{32m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{64m_e^2}{(s-m_e^2)^2} + \frac{64m_e^2}{(u-m_e^2)^2} - \frac{32m_e^2}{(u-m_e^2)^2} \\ & + \frac{32m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{32m_e^2}{(s-m_e^2)^2} \\ & = \frac{32m_e^2}{(u-m_e^2)^2} + \frac{64m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{32m_e^2}{(s-m_e^2)^2} \\ & = 32m_e^2 \left( \frac{1}{u-m_e^2} + \frac{1}{s-m_e^2} \right)^2 \end{aligned} \tag{D.40}$$

$(p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu)$

$$\begin{aligned} & \frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{64m_e^2}{(s-m_e^2)^2} + \frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \\ & + \frac{8(u-m_e^2)}{(u-m_e^2)^2} - \frac{8(s-u-2m_e^2)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{8(s+3m_e^2)}{(s-m_e^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8(u+3m_e^2)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{8(s-5m_e^2)}{(s-m_e^2)^2} \\
&= 32m_e^2 \left( \frac{1}{u-m_e^2} + \frac{1}{s-m_e^2} \right) \frac{1}{s-m_e^2}
\end{aligned} \tag{D.41}$$

$(p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu)$

$$\begin{aligned}
&-\frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{32m_e^2}{(s-m_e^2)^2} + \frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \\
&-\frac{32m_e^2}{(u-m_e^2)^2} + \frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)^2} + \frac{8(s-u-2m_e^2)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{16m_e^2}{(s-m_e^2)^2} \\
&= -\frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)^2} + \frac{8(s-u-4m_e^2)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{16m_e^2}{(s-m_e^2)^2} \\
&= -16m_e^2 \left( \frac{1}{u-m_e^2} + \frac{1}{s-m_e^2} \right)^2 + \frac{8(s-u)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)}
\end{aligned} \tag{D.42}$$

$(k^\nu k^\sigma)$

$$\begin{aligned}
&-\frac{32m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{64m_e^2}{(s-m_e^2)^2} + \frac{16(u+m_e^2)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{16(s+m_e^2)}{(s-m_e^2)^2} \\
&= \frac{16(u-m_e^2)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{16(s-3m_e^2)}{(s-m_e^2)^2} \\
&= \frac{16}{s-m_e^2} - \frac{16(s-3m_e^2)}{(s-m_e^2)^2} \\
&= \frac{32m_e^2}{(s-m_e^2)^2}
\end{aligned} \tag{D.43}$$

$(k'^\nu k'^\sigma)$

$$\begin{aligned}
&\frac{32m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{16(s+m_e^2)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \\
&= \frac{16}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} (2m_e^2 - s - m_e^2) \\
&= -\frac{16(s-m_e^2)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \\
&= -\frac{16}{u-m_e^2}
\end{aligned} \tag{D.44}$$

$(k^\nu k'^\sigma + k^\sigma k'^\nu)$

$$\begin{aligned}
&-\frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{32m_e^2}{(s-m_e^2)^2} + \frac{8(s-u)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{8(s+m_e^2)}{(s-m_e^2)^2} \\
&= \frac{8(s-u-2m_e^2)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{8(s-3m_e^2)}{(s-m_e^2)^2} \\
&= 8 \left\{ \frac{1}{u-m_e^2} - \frac{2m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{2m_e^2}{(s-m_e^2)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{D.45}$$

よって、

$$W^{\alpha\beta} = Ag^{\alpha\beta} + Bp^\alpha p^\beta + C(p^\alpha k^\beta + p^\beta k^\alpha) + D(p^\alpha k'^\beta + p^\beta k'^\alpha) + Ek^\alpha k^\beta + Fk'^\alpha k'^\beta + G(k^\alpha k'^\beta + k'^\alpha k^\beta) \quad (\text{D.46})$$

$$\begin{aligned} A &= -4 \left( \frac{s - m_e^2}{u - m_e^2} + \frac{u - m_e^2}{s - m_e^2} \right) \\ B &= 32m_e^2 \left( \frac{1}{u - m_e^2} + \frac{1}{s - m_e^2} \right)^2 \\ C &= 32m_e^2 \left( \frac{1}{u - m_e^2} + \frac{1}{s - m_e^2} \right) \frac{1}{s - m_e^2} \\ D &= -16m_e^2 \left( \frac{1}{u - m_e^2} + \frac{1}{s - m_e^2} \right)^2 + \frac{8(s - u)}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\ E &= -\frac{16}{m_e^2} (s - m_e^2)^2 \\ F &= -\frac{16}{u - m_e^2} \\ G &= 8 \left\{ \frac{1}{u - m_e^2} - \frac{2m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} - \frac{2m_e^2}{(s - m_e^2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{u - m_e^2}{m_e^2} &\equiv x \\ \frac{s - m_e^2}{m_e^2} &\equiv y \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} A &= -4 \left( \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \\ B &= \frac{32}{m_e^2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 \\ C &= \frac{32}{m_e^2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \frac{1}{y} \\ D &= -\frac{16}{m_e^2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{8}{m_e^2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \\ E &= \frac{32}{m_e^2} \frac{1}{y^2} \\ F &= -\frac{16}{m_e^2} \frac{1}{x} \\ G &= \frac{8}{m_e^2} \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{xy} - \frac{2}{y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

$$g_{\mu\nu} W^{\mu\nu} = 4A + Bm_e^2 + 2C(p \cdot k) + 2D(p \cdot k') + Ek^2 + Fk'^2 + 2G(k \cdot k')$$

$$\begin{aligned}
&= 4A + Bm_e^2 + 2C(s^2 - m_e^2) - D(u - m_e^2) + G(s + u - 2m_e^2) \\
&= 4A + Bm_e^2 + Cm_e^2y - Dm_e^2x + Gm_e^2(x + y) \\
&= -16\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 32\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 + 32\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 16\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 x \\
&\quad - 8\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)x + 8(x + y)\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{xy} - \frac{2}{y^2}\right) \\
&= 32\left\{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right\} \tag{D.50}
\end{aligned}$$

$$= \frac{32}{16m_e}\left\{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right\} \tag{D.51}$$

が導かれる。ここで、

$$\begin{aligned}
-xm_e^2 &= \kappa \\
-ym_e^2 &= \kappa' \tag{D.52}
\end{aligned}$$

とおくと、 $\bar{X}$  が出てくる事が分かる。

## 参考文献

- [1] Zeldovich, Ya. B., & Sunyaev, R. A. 1969, AP&SS, 4, 301
- [2] Sunyaev, R. A., & Zeldovich, Ya. B. 1970, AP&SS, 7, 3
- [3] Sunyaev, R. A., & Zeldovich, Ya. B. 1972, Comments Astrophys. Space Phys., 4, 173
- [4] Sunyaev, R. A., & Zeldovich, Ya. B. 1980a, ARA&A, 18, 537
- [5] Sunyaev, R. A., & Zeldovich, Ya. B. 1980b, MNRAS, 190, 413
- [6] Sunyaev, R. A., & Zeldovich, Ya. B. 1981, Astrophys. Space Phys. Rev., 1, 1
- [7] Tucker, W., Blanco, P., Rappoport, S., David, L., Fabricant, D., Falco, E. E., Forman, W., Dressler, A., & Ramella, M. 1998, ApJ, 496, L5
- [8] Itoh, N., Kohyama, Y., & Nozawa, S. 1998, ApJ, 502, 7
- [9] Nozawa, S., Itoh, N., & Kohyama, Y. 1998b, ApJ, 508, 17
- [10] Sazonov, S. Y., & Sunyaev, R. A. 1999, ApJ, 508, 1
- [11] Challinor, A., & Lasenby, A. 1999, ApJ, 510, 930
- [12] Shimon, N., & Rephaeli, Y. 2004, New astronomy, 9, 69
- [13] Nozawa, S., Itoh, N., & Suda, Y., & Ohhata, Y. 2006, Nuovo Cimento, 121 B, 487
- [14] Penzias, A. A., & Wilson, A. W. 1965, ApJ, 142, 419
- [15] Gamow, G. 1946, Phys. Rev. D, 70, 572
- [16] Alpher, R. A., & Herman, R. C. 1949, Phys. Rev. D, 75, 7
- [17] Birkinshaw, M. 1999, Physics Reports, 310, 97
- [18] Cavaliere, A., & Fusco-Femiano, R. 1976, A&A, 49, 137
- [19] Cavaliere, A., & Fusco-Femiano, R. 1978, A&A, 70, 677
- [20] Benson, B. A., Church, S. E., Ade, P. A. R., Bock, J. J., Ganga, K. M., Hinderks, J. R., Mauskoph, P. D., Philhour, B., Runyan, M. C., & thompson, K. L. 2003, ApJ, 592, 674

- [21] Mather, J. C., et al. 1990, ApJ, 354, L37
- [22] Mather, J. C., et al. 1994, ApJ, 420,439
- [23] Mather, J. C., Fixsen, D. J., Shafer, R. A., Mosier, C., & Wilkinson, D. T. 1999, ApJ, 512, 511
- [24] Meyer, D. M., & Jura, M. 1985, ApJ, 297, 119
- [25] Crane, P., Hegyi, D. J., Kutner, M. L., & Mandolesi, N. 1989, ApJ, 346, 136
- [26] Gush, H. P., Halpern, M., & Wishnow, E. H. 1990, Phys. Rev. Lett., 65, 537
- [27] Fixen, D. J., et al. 1994b, ApJ, 420, 457
- [28] Fixen, D. J., et al. 1994a, ApJ, 420, 445
- [29] Spergel, D. N., et al. 2003, ApJS, 148, 175
- [30] Bennett, C. L., et al. 2003b, ApJS, 148, 1
- [31] Komatsu, E., et al. 2003, ApJS, 148, 119
- [32] Allen, S. W., Schmidt, R. W., & Fabian, A. C. 2002, MNRAS, 335, 256
- [33] Komatsu, E., et al., 2001, PASJ, 53, 57
- [34] King, I. R. 1972, ApJ, 174, 123
- [35] Henry, R. C. 1972, ApJ(Letters), 172, L97
- [36] Reese, E. D., Carlstrom, J. E., Joy, M., Mohr, J. J., Grego, L., & Holzappel, W. L. 2002, ApJ, 581, 53
- [37] Carlstrom, J. E., Holder, G. P., & Reese, E. D. 2002, ARA&A, 40, 643
- [38] Rephaeli, Y., & Lahav, O. 1991, ApJ, 372, 21
- [39] Haehnelt, M. G., & Tegmark, M. 1996, MNRAS, 279, 545
- [40] LaRoque, S. J., et al., 2006, ApJ, 652, 917
- [41] Freedman, W. L., et al. 2001, ApJ, 553, 47
- [42] Challinor, A., & Lasenby, A. 1998, ApJ, 499, 1
- [43] Itoh, N., Kawana, Y., Nozawa, S., & Kohyama, Y. 2001, MNRAS, 327, 567
- [44] Rephaeli, Y. 1995a, ARA&A, 33, 541
- [45] Rephaeli, Y. 1995b, ApJ, 445, 33
- [46] Wright, E. L. 1979, ApJ, 232, 348